

Apuntes de Mecánica de Fluidos

Agustín Martín Domingo

agustin6martin@gmail.com

Departamento de Estructuras y Física de Edificación

E.T.S. Arquitectura de Madrid

Universidad Politécnica de Madrid

Copyright

Esta obra “*Apuntes de Mecánica de Fluidos*” (texto y figuras) es:

Copyright (C) 1997-2017 Agustín Martín Domingo <agustin6martin@gmail.com>

con las siguientes excepciones:

- La imagen de la figura 3–15 es Copyright (C) 2007 Rosario Van Tulpe y ha sido cedida por su autora al dominio público.
- La imagen de la figura 6–3 es Copyright (C) 2008 Tim Vickers y ha sido cedida por su autor al dominio público.
- La imagen de la figura 6–11 pertenece al dominio público y proviene del informe de Henry Darcy de 1856 *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*.

Algunos derechos reservados. Obra depositada en el RPI y en safecreative.org.

Versión 2.5, marzo de 2017. Una copia de esta obra puede encontrarse en <http://oa.upm.es/45056/>.

Licencia de distribución

Este trabajo se distribuye bajo una licencia *Creative Commons* Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 3.0 España (CC-BY-SA-NC).

Para ver una copia de esta licencia, visite la página de la licencia

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es>

o envíe una carta a Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, EEUU.

Estos apuntes se hacen públicos con la intención de que sean útiles. Aunque se ha tenido cuidado durante su preparación no puede descartarse que aún contengan errores. El autor no garantiza que el contenido de estos apuntes esté libre de errores.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain License. To view a copy of this license, visit

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es/>

or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

These notes are provided in the hope that they are useful. Although they have been carefully elaborated they may still contain errors. There is absolutely no warranty about these contents.

Resumen de la licencia:

Está permitido...

- Copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra
- Hacer obras derivadas

Bajo las siguientes condiciones

Reconocimiento: Se deben reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor o el licenciador.

No comercial: No se puede utilizar esta obra para fines comerciales.

Compartir bajo la misma licencia: Si se altera o se transforma esta obra, o se genera una obra derivada, sólo se puede distribuir la obra generada bajo una licencia similar a ésta.



Indice

1. Introducción a los fluidos. La hipótesis del continuo.	1
1.1. Introducción.	1
1.2. Descripción de un fluido. Hipótesis del continuo.	2
1.3. Propiedades de los fluidos.	3
1.3.1. Densidad ρ .	3
1.3.2. Peso específico γ .	4
1.3.3. Volumen específico v .	4
1.3.4. Viscosidad.	4
1.3.5. Presión.	5
1.3.6. Compresibilidad.	5
1.3.7. Dilatación térmica.	6
2. Estática de fluidos.	7
2.1. Ecuación general de la estática de fluidos. Principio de Pascal.	7
2.1.1. Expresión diferencial de la misma.	7
2.1.2. Caso particular: fluido incompresible.	9
2.1.3. Principio de Pascal.	10
2.1.4. Paradoja de Pascal.	10
2.2. Tubos en U y manómetros.	11
2.2.1. Fluidos miscibles.	11
2.2.2. Líquidos no miscibles.	12
2.2.3. Manómetros.	12
2.2.4. Manómetro diferencial.	13
2.3. Variación de la presión con la altura en un gas perfecto en reposo.	13
2.3.1. Atmósfera isoterma.	13
2.3.2. Atmósfera con dependencia lineal de la temperatura.	14
2.3.3. Atmósfera tipo	14
2.4. Equilibrio de un cuerpo sumergido.	15
2.4.1. Flotación. Principio de Arquímedes.	15
2.4.2. Estabilidad de un cuerpo semisumergido.	16
2.5. Fuerzas hidrostáticas sobre superficies.	18
2.5.1. Fuerza sobre superficies planas.	18
2.5.2. Fuerza sobre superficies curvas.	21
3. Introducción a la dinámica de fluidos. Dinámica de fluidos perfectos.	23
3.1. Análisis del movimiento de un fluido.	23
3.1.1. Aproximaciones clásicas al estudio de los fluidos.	23
3.1.2. Tipos de flujo.	24
3.1.3. Senda, línea de corriente y de traza. Tubo de flujo.	25
3.2. Ecuación de continuidad.	26
3.2.1. Forma integral.	26
3.2.2. Forma diferencial.	28
3.3. Fuerza y aceleración en un elemento de fluido.	30
3.3.1. Fuerza neta sobre un elemento de un tubo de flujo. Variación de la cantidad de movimiento.	30
3.3.2. Ecuaciones de movimiento microscópicas de un fluido perfecto. Aceleración. Ecuación de Euler.	31
3.3.3. Aplicación a un fluido en reposo.	32
3.3.4. Aplicación a un fluido en reposo en un sistema de referencia no inercial.	33
3.3.5. Vorticidad.	35
3.4. Conservación de la energía en un fluido perfecto. Ecuación de Bernoulli.	36
3.4.1. Obtención a partir de las ecuaciones de Euler.	36
3.4.2. Obtención a través de la conservación de la energía.	38
3.5. Aplicaciones de las ecuaciones anteriores a fluidos perfectos.	39
3.5.1. Velocidad de salida por un orificio (teorema de Torricelli).	39
3.5.2. Tiempo de vaciado de un gran depósito abierto a la atmósfera.	40
3.5.3. Presión dinámica y presión estática. Tubo de Pitot.	41
3.5.4. Efecto Venturi. Venturímetro.	42
4. Dinámica de fluidos reales.	45
4.1. Introducción.	45
4.1.1. Efecto de la viscosidad en el movimiento de un fluido.	45
4.1.2. Régimen laminar y régimen turbulento.	46
4.2. Viscosidad en fluidos reales.	47

4.2.1.	La condición de no deslizamiento.	47
4.2.2.	Flujo turbulento y capa límite.	47
4.2.3.	Fluidos newtonianos. Viscosidades dinámica y cinemática.	48
4.2.4.	Factores que influyen en la viscosidad.	50
4.2.5.	Fluidos no newtonianos.	51
4.3.	Ecuaciones de movimiento de los fluidos reales.	53
4.3.1.	Fluido perfecto o flujo no viscoso.	55
4.3.2.	Fluido newtoniano. Las ecuaciones de Navier-Stokes.	56
5.	Flujo de fluidos en tuberías.	57
5.1.	Características del flujo en una tubería.	57
5.1.1.	Número de Reynolds en una tubería.	57
5.1.2.	Distribución de velocidades y tensiones cortantes en régimen laminar en una tubería. Fórmula de Poiseuille.	58
5.1.3.	Perfiles de flujo en una tubería	60
5.2.	Variación de altura de carga debida a una máquina.	60
5.3.	Pérdidas de carga. Generalidades.	61
5.3.1.	Pérdidas de carga lineales.	62
5.3.2.	Pérdidas de carga locales o singulares.	66
5.4.	La ecuación de Bernoulli generalizada.	68
5.4.1.	Representación gráfica de la pérdida de carga.	69
5.5.	Redes de tuberías.	70
5.6.	Cavitación.	71
5.7.	Golpe de ariete o choque hidráulico.	71
6.	Mecánica de fluidos en medios permeables.	75
6.1.	Fenómenos de superficie: tensión superficial y capilaridad	75
6.1.1.	Tensión superficial.	75
6.1.2.	Ángulo de contacto	79
6.1.3.	Capilaridad	81
6.2.	Flujo en medios permeables.	82
6.2.1.	El permeámetro. La ley de Darcy macroscópica en una dimensión.	84
6.2.2.	Velocidad de descarga y velocidad microscópica promedio.	85
6.2.3.	La ecuación de Bernoulli con permeación.	89
6.2.4.	Potencial hidráulico y sus componentes. El campo hidráulico.	90
6.2.5.	La ley de Darcy microscópica en una dimensión.	90
6.2.6.	La ley de Darcy microscópica en tres dimensiones.	91
6.2.7.	Flujo a través de terrenos saturados homogéneos e isotrópos.	92
6.2.8.	La ecuación de Laplace y su resolución.	92
6.2.9.	Flujo permeable a través de medios anisótropos	96
6.2.10.	La red de flujo.	99
6.2.11.	Ejemplos de redes de flujo en distintos sistemas	99
6.2.12.	Subpresiones	101
A.	Tablas de datos	103
A.1.	Momentos y productos de inercia de algunas secciones planas sencillas.	103
A.2.	Conversión de unidades de presión.	104
	Indice alfabético	105
	Referencias	109

Capítulo 1

Introducción a los fluidos. La hipótesis del continuo.

Índice del capítulo

1.1. Introducción.	1
1.2. Descripción de un fluido. Hipótesis del continuo.	2
1.3. Propiedades de los fluidos.	3
1.3.1. Densidad ρ .	3
1.3.2. Peso específico γ .	4
1.3.3. Volumen específico v .	4
1.3.4. Viscosidad.	4
1.3.5. Presión.	5
1.3.6. Compresibilidad.	5
1.3.7. Dilatación térmica.	6

1.1. Introducción.

La *Mecánica de Fluidos* estudia las leyes del movimiento de los fluidos y sus procesos de interacción con los cuerpos sólidos. La Mecánica de Fluidos como hoy la conocemos es una mezcla de experimento y teoría que proviene por un lado de los trabajos iniciales de los ingenieros hidráulicos, de carácter fundamentalmente empírico, y por el otro del trabajo teórico de básicamente matemáticos, que abordaban el problema desde un enfoque analítico. Al integrar en una única disciplina las experiencias de ambos colectivos, se evita la falta de generalidad derivada de un enfoque estrictamente empírico, con análisis válidos únicamente para cada caso concreto, y al mismo tiempo se permite que los desarrollos analíticos matemáticos aprovechen adecuadamente la información experimental y eviten basarse en simplificaciones artificiales alejadas de la realidad.

La característica fundamental de los fluidos es la denominada *fluidez*. Un fluido cambia de forma de manera continua cuando está sometido a un esfuerzo cortante por muy pequeño que éste sea, es decir, un fluido no es capaz de soportar un esfuerzo cortante sin moverse durante ningún intervalo de tiempo. Unos fluidos se moverán más lentamente que otros, pero ante un esfuerzo cortante se moverán siempre. La medida de la facilidad con que se mueve vendrá dada por la *viscosidad* que se trata más adelante, relacionada con la acción de fuerzas de rozamiento. Por el contrario en un sólido se produce un cambio fijo γ para cada valor de la fuerza cortante aplicada. En realidad algunos sólidos pueden presentar ambos comportamientos, cuando la tensión aplicada está por debajo de un cierto umbral presenta el

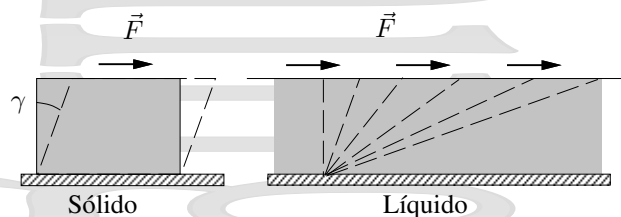


Figura 1-1: Diferencias entre los comportamientos de un líquido y de un sólido frente a una fuerza cortante aplicada.

comportamiento habitual, mientras que por encima de un cierto umbral el sólido puede plastificar, produciéndose una deformación más continua para una fuerza fija, de forma parecida a como ocurre en un fluido. Esto es precisamente lo que ocurre en la *zona de fluencia*. Si la fuerza persiste, se llega a la rotura del sólido. En cambio en otros sólidos se produce la rotura antes de llegar a dicha zona de fluencia.

Así, mientras que un sólido experimenta un desplazamiento definido (o se rompe por completo) bajo la acción de una fuerza cortante, en los fluidos pequeñas fuerzas producen grandes deformaciones no elásticas (en general no se recupera la forma) a volumen constante, que se realizan de forma continua. Mientras que para un sólido bajo una fuerza cortante constante se alcanza un *ángulo de deformación* determinado y constante, en un fluido debemos hablar de una *velocidad de deformación* constante o no, ya que la deformación se produce de forma continua.

Dentro de los fluidos, la principal diferencia entre líquidos y gases estriba en las distintas compresibilidades de los mismos.

Gases. Los gases presentan una gran compresibilidad, lo que influye sobre las características del flujo, ya que tanto el volumen como la densidad varían con facilidad. En el caso de los gases el movimiento térmico vence a las fuerzas atractivas y, por tanto tienden a ocupar todo el volumen del recipiente que los contiene.

Líquidos. Por el contrario, en los líquidos la compresibilidad es muy débil. Esto es debido a que las fuerzas atractivas entre las moléculas del líquido vencen al movimiento térmico de las mismas, colapsando las moléculas y formando el líquido. Al contrario que en el caso de los gases, que tendrían a ocupar todo el volumen que los contiene, los líquidos tienden a formar una superficie libre y además es muy difícil cambiarlos de volumen.

A causa de la fluidez los fluidos no conservan la forma y por tanto es muy fácil cambiarlos de forma. Al situarlos en un recipiente toman la forma del mismo (si lo llenan) o de parte del mismo.

La noción de compresibilidad dada es la correspondiente a la Estática de Fluidos. En Dinámica de Fluidos, hay casos en los que la densidad no varía a lo largo del flujo, incluso en un fluido compresible, por lo que a ese flujo le podemos aplicar las leyes de los fluidos incompresibles. Tiene en este caso más sentido hablar de flujo compresible o incompresible.

1.2. Descripción de un fluido. Hipótesis del continuo.

Para la descripción del movimiento de un fluido recurriremos a las leyes generales de la Mecánica (leyes de Newton, leyes de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía), junto con relaciones específicas condicionadas por la fluidez.

A escala microscópica la materia (y en particular un fluido), se compone de moléculas que se encuentran a distintas distancias entre sí, con espacio vacío entre ellas. Estas moléculas están continuamente moviéndose, interaccionando y colisionando entre sí de forma compleja. Un análisis exacto del problema debiera tener en cuenta la acción de todas y cada una de las moléculas que componen el fluido, incluyendo posición, velocidad e interacciones lo que, teniendo en cuenta el gran número de moléculas que componen un fluido real, es completamente inmanejable. Una variante estadística de este procedimiento, con importantes simplificaciones, es la que se adopta en Teoría Cinética y en Mecánica Estadística, pero el tratamiento es aún demasiado complejo para utilizarlo en el trabajo diario de Hidráulica.

Sin embargo, en la mayor parte de los cálculos hidráulicos, el interés real no está centrado en el comportamiento molecular microscópico del fluido, sino en una serie de manifestaciones macroscópicas promedio que resultan de la acción conjunta de una gran cantidad de moléculas, manifestaciones como la densidad, la presión o la temperatura. En la práctica es posible hacer una simplificación importante de cara a describir esas manifestaciones, suponer que todas ellas son el resultado de la acción de una distribución continua de una materia hipotética, a la que denominaremos el *continuo* o el *medio continuo*, en lugar de estudiar el conglomerado real de las moléculas discretas, de mucha mayor complejidad. De este modo, a la hora de estudiar nuestros problemas sustituiremos la materia real por este medio continuo ficticio, cuyas propiedades varían de forma continua y reflejan a nivel macroscópico las propiedades del medio real. Nótese que el hecho de utilizar este medio continuo ficticio nos permite describir las propiedades del medio mediante una serie de funciones matemáticas que varían de forma continua y están definidas para todos los puntos del espacio ocupados por el medio real.

Hipótesis del continuo:

La materia y las propiedades físicas asociadas a la misma se consideran distribuidas de forma continua en ella, y no concentradas en pequeñas fracciones (átomos y moléculas) de la misma.

Para ello se toma un elemento de volumen muy pequeño[†] en el entorno del punto y se asigna al punto el valor promedio de las distintas magnitudes en ese entorno infinitesimal. Obsérvese que por ello cada función no refleja estrictamente el comportamiento del fluido en cada punto sino en el entorno de cada punto, aunque el valor se asigne al punto. De este modo, sustituimos la materia real de carácter discreto por una materia ficticia continua[‡] cuyas propiedades en cada punto vienen dadas por las propiedades promedio de la materia real en el entorno de ese punto.

Este concepto del medio continuo permite una gran simplificación en el análisis en la inmensa mayoría de los casos aunque, por supuesto, este enfoque debe utilizarse únicamente cuando arroje resultados razonablemente correctos. En general, no puede utilizarse cuando el recorrido libre medio de las moléculas es del orden de las magnitudes características del problema. En estas condiciones la acción de cada molécula individual es significativa y debe estudiarse individualmente.

Por ejemplo, consideremos la acción sobre una superficie de la pared en el caso de un depósito cerrado que contiene un gas a una cierta presión, en régimen permanente. Incluso a baja presión, la gran cantidad de colisiones de moléculas sobre la superficie da lugar a una fuerza global que en la práctica puede considerarse independiente del tiempo, comportamiento que será correctamente simulado por nuestro hipotético medio continuo. Ahora bien, si la presión fuera tan baja que únicamente quedaran en el tanque unas pocas moléculas de forma que el recorrido libre medio de las mismas es del orden de magnitud de las dimensiones del elemento considerado, y si pudiéramos medir fuerzas debidas a choques individuales se observaría una actividad errática según las moléculas individuales o los grupos de moléculas bombardean la superficie y no se podrá hablar de una fuerza constante, sino de una serie de choques aleatorios contra la superficie. Por tanto, este comportamiento no podría ser reflejado por nuestro medio continuo. Lo mismo ocurriría si considerando el gas discreto real, tomamos una superficie muy pequeña, de forma que su tamaño es del orden del recorrido libre medio de las moléculas.

1.3. Propiedades de los fluidos.**1.3.1. Densidad ρ .**

La *densidad* ρ se define como la masa por unidad de volumen. La unidad de densidad en el sistema internacional es el $[\text{kg/m}^3]$. En el caso general de un fluido inhomogéneo, la densidad ρ varía de un punto a otro. Por tanto tenemos que definir la densidad en un punto como la masa por unidad de volumen en un elemento infinitesimal de volumen[§] en torno a ese punto:

$$\rho = \rho(x, y, z, t) = \frac{dm}{dV} \quad (1-1)$$

Por el contrario, para un fluido homogéneo, la densidad no varía de un punto a otro y puede definirse simplemente mediante

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (1-2)$$

Nótese que esto es posible gracias a la continuidad. En los líquidos, al tener baja compresibilidad, la densidad depende de la temperatura, pero apenas depende de la presión, $\rho = \rho(T)$. Para los fluidos compresibles, la densidad en general depende tanto de la presión como de la temperatura, $\rho = \rho(p, T)$. Para el caso concreto de un gas ideal,

[†] En este contexto de paso del medio real al medio continuo equivalente, hablamos de un elemento de volumen muy pequeño del medio real que aún contiene un número de partículas suficiente para que se puedan obtener propiedades promedio en dicho elemento de volumen, en vez de un elemento de volumen estrictamente infinitesimal, que significaría infinitamente pequeño.

[‡] Sin embargo, si ya estamos trabajando con el medio continuo y con las magnitudes macroscópicas asociadas al mismo, ya podemos hablar de un elemento de volumen infinitesimal que será efectivamente un elemento de volumen infinitesimal del medio continuo y no de la materia real discreta, con lo que utilizaremos el cálculo infinitesimal en la forma matemática habitual en la confianza de que a partir del mismo obtendremos las magnitudes macroscópicas.

[§] Nótese que es un elemento infinitesimal de volumen en el medio continuo, que corresponde a un elemento de volumen muy pequeño en el medio real que aún contiene una gran cantidad de partículas y en el que por tanto podemos definir propiedades promedio.

con una ecuación de estado $pV = nRT$, la densidad tiene la forma concreta

$$\rho(p, T) = \frac{\bar{M}p}{RT} \quad (1-3)$$

con \bar{M} la masa molecular promedio del gas y R la constante de los gases.

También se define la *densidad relativa* de una sustancia como el cociente entre la densidad de la misma y la densidad de una sustancia que se utiliza como referencia,

$$\rho_r = \frac{\rho}{\rho_{\text{referencia}}}. \quad (1-4)$$

Obviamente, la densidad relativa así definida es una magnitud adimensional. Para líquidos y sólidos la densidad relativa se suele referir a la densidad del agua a 1 atm y 4°C, de valor 1000 kg/m³. Para los gases, la densidad relativa se suele referir a la densidad del aire a una presión de 1 atm y una temperatura de 0°C.

1.3.2. Peso específico γ .

El *peso específico* γ se define como el peso por unidad de volumen. La unidad de peso específico en el sistema internacional es el [N/m³]. Para un fluido genérico posiblemente inhomogéneo el peso específico se define como

$$\gamma = \gamma(x, y, z, t) = g \frac{dm}{dV} = \rho g \quad (1-5)$$

donde g es la aceleración de la gravedad. Para el caso particular de un fluido homogéneo el peso específico queda como $\gamma = mg/V = \rho g$. Nótese que $\gamma = \rho g$ en todos los casos.

1.3.3. Volumen específico v .

Se denomina *volumen específico* v al volumen ocupado por la unidad de masa. En el caso general de un fluido inhomogéneo tendremos que hablar de su valor en cada punto y se define como

$$v = v(x, y, z, t) = \frac{dV}{dm} = \frac{1}{\rho}. \quad (1-6)$$

mientras que para un fluido homogéneo éste se define como $v = V/m = 1/\rho$. En todos los casos, $v = 1/\rho$. La unidad de volumen específico en el sistema internacional es el [m³/kg].

1.3.4. Viscosidad.

Como se ha dicho en la introducción, la *viscosidad* refleja la resistencia al movimiento del fluido y tiene un papel análogo al del rozamiento en el movimiento de los sólidos. La viscosidad está siempre presente en mayor o menor medida tanto en fluidos compresibles como incompresibles, pero no siempre es necesario tenerla en cuenta.

El modelo más simplificado es el modelo denominado de *fluido perfecto o no viscoso*, en el que no se tiene en cuenta el efecto de las fuerzas viscosas mientras que el modelo denominado de *fluido real o viscoso* es más complejo al tener en cuenta de alguna forma la acción de las fuerzas viscosas. El modelo de fluido perfecto funciona bien cuando el efecto de la viscosidad es muy pequeño y puede despreciarse mientras que cuando no es así es necesario utilizar el modelo de fluido real, salvo que se quiera una primera aproximación al problema con un error mayor.

En el caso del agua a veces se habla del *flujo del agua seca* para el flujo no viscoso del agua y del *flujo del agua mojada* para el flujo viscoso.

1.3.5. Presión.

Para un fluido genérico la *presión* p en un punto del mismo se define como la componente normal de la fuerza por unidad de superficie que actúa sobre una superficie infinitesimal (real o imaginaria) que contiene a dicho punto

$$p = \frac{dF_{\perp}}{dS} \quad (1-7)$$

Su unidad en el sistema internacional es el *Pascal* ($1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$). En general, la presión en un fluido depende del punto, $p = p(x, y, z)$.

Mientras que en el caso de los sólidos en reposo, las fuerzas que actúan a través de una superficie pueden tener cualquier dirección, en el caso de los fluidos en reposo estas fuerzas deben ser siempre perpendiculares a la superficie, ya que si hubiera una componente tangencial, el fluido fluiría. De este modo, un fluido en reposo que se encuentra a

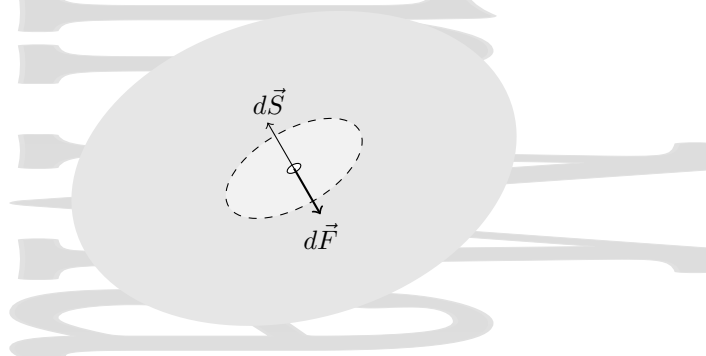


Figura 1-2: En un fluido en reposo, la fuerza ejercida por el fluido a través de cualquier superficie real o imaginaria es perpendicular a la misma. La presión en un punto se define como la fuerza por unidad de superficie a través de una superficie plana infinitesimal centrada en dicho punto. El valor de la presión en un punto no depende de la orientación de la superficie infinitesimal.

una presión p ejerce una fuerza $-pd\vec{S}$ sobre cualquier superficie plana arbitraria en contacto con el fluido en el punto, definida por un vector unitario $d\vec{S}$ perpendicular a la superficie.

En el caso de un fluido en movimiento, si éste es no viscoso tampoco aparecen componentes tangenciales de la fuerza, pero si se trata de un fluido viscoso sí que aparecen fuerzas tangenciales de rozamiento.

Se denomina *presión manométrica* a la presión medida respecto de la presión atmosférica, es decir, a la diferencia entre la *presión absoluta* (la presión real) y la presión atmosférica. Muchos aparatos de medida no dan el valor absoluto de la presión (presión absoluta) sino la diferencia respecto de la presión atmosférica. Estos aparatos son los denominados *manómetros*. La presión manométrica puede ser positiva o negativa (aunque nunca menor de -1 atm). En algunos casos se denomina *presión de vacío* a la presión manométrica negativa cambiada de signo (que nunca podría ser mayor que 1 atm), pero esta denominación es confusa ya que buena parte de los medidores de alto vacío dan sus resultados como presión absoluta.

1.3.6. Compresibilidad.

Se caracteriza por el *coeficiente de compresibilidad* κ , definido como

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} \quad (1-8)$$

que representa la disminución relativa del volumen por unidad de aumento de presión. Su unidad es la inversa de presión, en el sistema S.I. [$\text{m}^2/\text{N} \equiv \text{Pa}^{-1}$]. Su inversa,

$$\mathcal{K} = \frac{1}{\kappa} \quad (1-9)$$

es el *módulo de compresibilidad* [$\text{N/m}^2 \equiv \text{Pa}$]. Tanto κ como \mathcal{K} dependen de la forma en que se realiza el proceso.

1.3.7. Dilatación térmica.

Se caracteriza por el *coeficiente de dilatación térmica de volumen*, que representa el aumento relativo del volumen producido por un aumento de la temperatura, y está definida como

$$\alpha_v = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT} \quad (1-10)$$

donde V es el volumen inicial del líquido. Su unidad es la inversa de grado [K^{-1}] o [$^{\circ}\text{C}^{-1}$] y también depende de la forma en que realiza el proceso.

Capítulo 2

Estática de fluidos.

Índice del capítulo

2.1. Ecuación general de la estática de fluidos. Principio de Pascal.	7
2.1.1. Expresión diferencial de la misma.	7
2.1.2. Caso particular: fluido incompresible.	9
2.1.3. Principio de Pascal.	10
2.1.4. Paradoja de Pascal.	10
2.2. Tubos en U y manómetros.	11
2.2.1. Fluidos miscibles.	11
2.2.2. Líquidos no miscibles.	12
2.2.3. Manómetros.	12
2.2.4. Manómetro diferencial.	13
2.3. Variación de la presión con la altura en un gas perfecto en reposo.	13
2.3.1. Atmósfera isoterma.	13
2.3.2. Atmósfera con dependencia lineal de la temperatura.	14
2.3.3. Atmósfera tipo	14
2.4. Equilibrio de un cuerpo sumergido.	15
2.4.1. Flotación. Principio de Arquímedes.	15
2.4.2. Estabilidad de un cuerpo semisumergido.	16
2.5. Fuerzas hidrostáticas sobre superficies.	18
2.5.1. Fuerza sobre superficies planas.	18
2.5.2. Fuerza sobre superficies curvas.	21

Comenzaremos estudiando el caso del *fluido estático* o *fluido en reposo*, en el cual todas las partículas tienen (en movimiento promedio) una velocidad nula. [†] En este fluido en reposo no aparecen fuerzas tangenciales que darían lugar a un movimiento tangencial. Así, las fuerzas de contacto ejercidas por un fluido en reposo sobre la pared del recipiente que lo contiene son siempre perpendiculares a la misma. Asimismo, si introducimos un cuerpo cualquiera en el interior de un fluido, se ejercerá una fuerza sobre toda la superficie del cuerpo en contacto con el fluido y esta fuerza será normal a la superficie en cada punto. La fuerza por unidad de superficie dependerá del punto de la superficie, pero para un punto dado su magnitud no dependerá de la orientación de la superficie del cuerpo en ese punto. Como hemos visto en el tema anterior, denominaremos *presión* a la magnitud de esta fuerza normal por unidad de superficie sobre una superficie infinitesimal real o imaginaria centrada en ese punto. La presión es una magnitud escalar.

2.1. Ecuación general de la estática de fluidos. Principio de Pascal.

2.1.1. Expresión diferencial de la misma.

El caso más general.

En el caso más general, la fuerza de presión por unidad de volumen ejercida por el fluido exterior a un pequeño elemento de volumen sobre el contenido del mismo, vendrá dada por el gradiente de la presión, $\vec{\nabla}p$ (véase la sección 3.3.2). Si no hay otras fuerzas como la de la gravedad, la presión debe compensarse para que haya equilibrio.

[†]Rigurosamente, se mueven (en movimiento promedio) con una velocidad constante con respecto de un sistema de referencia inercial.

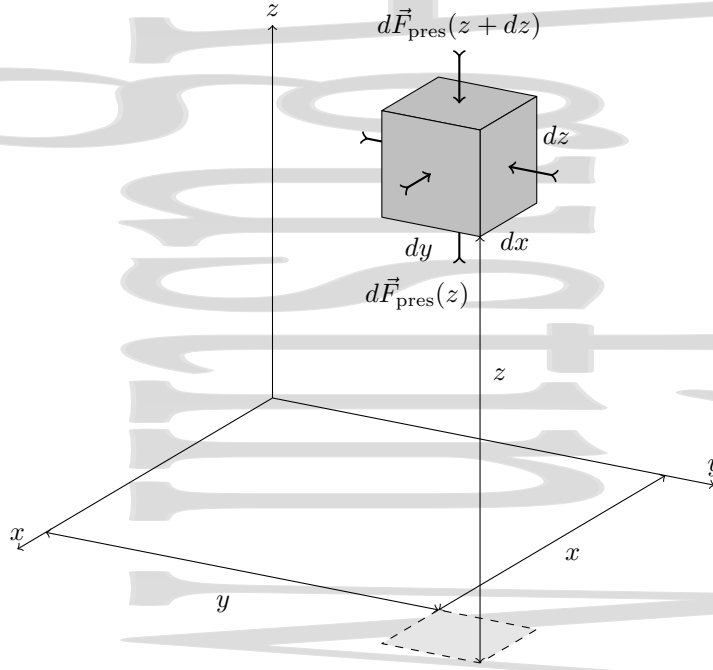


Figura 2-1: Obtención de la ecuación general de la estática de fluidos para un fluido en reposo sometido exclusivamente a la acción de la fuerza gravitatoria.

Consideremos una situación en la que estas fuerzas adicionales pueden describirse mediante una energía potencial, con Φ el potencial o energía potencial por unidad de masa (esto es lo que ocurre para un fluido sometido al campo gravitatorio, con $\Phi = gz$). En estas circunstancias, la fuerza por unidad de masa vendrá dada por $-\vec{\nabla}\Phi$ (con las dimensiones de una aceleración) y si ρ es la densidad del fluido, la fuerza por unidad de volumen por $-\rho\vec{\nabla}\Phi$. En el equilibrio estático la suma de las fuerzas que actúan sobre el elemento de volumen debe ser cero, y por tanto para que este equilibrio se produzca la aceleración neta (3-21) debe ser 0.

$$-\vec{\nabla}p - \rho\vec{\nabla}\Phi = 0. \quad (2-1)$$

En el caso general esta ecuación (2-1) no tiene solución. Si la densidad varía en el fluido de forma arbitraria en general no es posible que las fuerzas estén equilibradas y el fluido no puede estar en equilibrio mecánico, estableciéndose corrientes de convección. Esto es así ya que $\vec{\nabla}p$ es un gradiente puro mientras que el término $\rho\vec{\nabla}\Phi$ no lo es para una densidad ρ variable en general.

Sin embargo, si la densidad ρ es constante, el conjunto $\vec{\nabla}(p + \rho\Phi)$ es un gradiente puro y la ecuación (2-1) tiene solución (como ocurre en el caso de fluidos incompresibles bajo la acción de la fuerza gravitatoria que se ve un poco más adelante). La ecuación anterior también tiene solución cuando ρ es función únicamente de p , como ocurre en el caso que vemos a continuación para un fluido compresible con $\rho = \rho(p)$ sobre el que actúa la fuerza gravitatoria.

La ecuación general de la hidrostática para $\rho = \rho(p)$.

Calculemos ahora la dependencia de la presión con la altura en un fluido sometido exclusivamente a la atracción gravitatoria. Para ello consideraremos un pequeño elemento prismático infinitesimal de volumen dV cuyas caras son perpendiculares a los ejes coordenados y tienen dimensiones dx , dy y dz , con su cara inferior a una altura z . La fuerza que actúa sobre la cara inferior del elemento prismático (de superficie $dx dy$) es perpendicular a la misma y está dirigida hacia arriba (según \vec{u}_z), siendo obviamente

$$d\vec{F}(z) = p(z)dx dy \vec{u}_z$$

mientras que la fuerza que actúa sobre la cara superior está dirigida hacia abajo y es

$$d\vec{F}(z + dz) = p(z + dz)dxdy(-\vec{u}_z) = -[p(z) + dp]dxdy\vec{u}_z$$

Así, la fuerza de presión neta en la dirección vertical es

$$d\vec{F}_{\text{pres}} = d\vec{F}(z) + d\vec{F}(z + dz) = -dp dxdy\vec{u}_z$$

(dirigida hacia arriba) que, sumada al peso $\rho g dxdydz$ del elemento de fluido debe dar una fuerza resultante nula al estar el fluido en reposo. De aquí se obtiene la *ecuación general de la estática de fluidos* en forma diferencial,

$$dp = -\rho g dz$$

donde el signo negativo refleja el hecho de que la presión disminuye al aumentar la altura (y aumenta al aumentar la profundidad). En la sección 3.3.3 se obtiene esta misma expresión como un caso particular de las ecuaciones de Euler del movimiento de un fluido perfecto.

2.1.2. Caso particular: fluido incompresible.

En el caso de un fluido incompresible la densidad no depende de la presión, y además se tiene una superficie libre. Es posible describir el problema en función de la profundidad respecto de la superficie libre h , que aumenta según z disminuye de forma que $dh = -dz$.

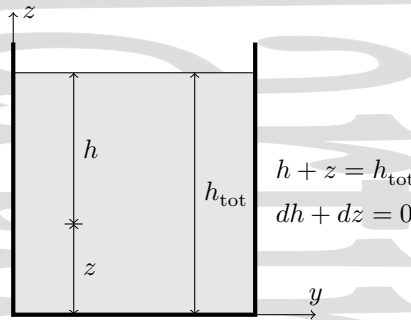


Figura 2-2: En un fluido incompresible se forma una superficie libre. En estas condiciones, la posición vertical de un punto puede expresarse tanto mediante la altura z respecto del plano xy como a través de la profundidad h respecto de la superficie libre.

La ecuación general de la estática quedaría entonces, en forma diferencial, como

$$dp = -\rho g dz = \rho g dh$$

Esta ecuación se puede integrar con facilidad entre la superficie libre y un punto que se encuentre a una profundidad h , quedando

$$\int_0^h dp = p - p_{\text{atm}} = \int_0^h \rho g dh = \rho g h \quad \left(= \int_{z_0}^z dp = -\rho g (z - z_0) \right)$$

que se escribe como

$$p(h) = p_{\text{atm}} + \rho g h = p_{\text{atm}} + \gamma h \quad (2-2)$$

y que es la ecuación general de la estática en forma integral para un fluido incompresible. En concreto, entre dos puntos del fluido a distinta profundidad, la diferencia de presiones es

$$p_2 - p_1 = \rho g (h_2 - h_1) = -\rho g (z_2 - z_1) \quad (2-3)$$

Estas expresiones subrayan el importante resultado de que la presión en un punto cualquiera de un fluido en reposo depende exclusivamente de la profundidad a la que se encuentra dicho punto, y de que la diferencia de presiones entre dos puntos de dicho fluido en reposo depende exclusivamente de la diferencia de profundidades de los mismos (y obviamente, también de la densidad del fluido).

2.1.3. Principio de Pascal.

El resultado anterior nos lleva de forma inmediata al principio de Pascal,

En un fluido incompresible, las variaciones locales de presión se transmiten íntegramente a todos los puntos del fluido y en todos los sentidos, así como a las superficies en contacto con el fluido.

o dicho con otras palabras, si la presión en un punto aumenta, por ejemplo por la aplicación de una fuerza externa, aumenta por igual en los demás puntos del fluido incompresible, ya que según (2-3) la diferencia de presiones entre dos puntos determinados depende únicamente de Δh para un fluido incompresible en reposo.

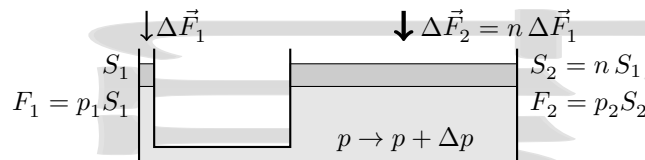


Figura 2-3: Prensa hidráulica. Al aplicar una pequeña fuerza adicional ΔF_1 sobre un líquido a través de un émbolo de pequeña sección se produce un cambio de presión Δp que se propaga a todo el líquido. Esto da lugar a una gran fuerza adicional $\Delta F_2 = \Delta F_1 S_2 / S_1$ actuando sobre un émbolo de gran sección S_2 .

Esto permite obtener grandes aumentos en la fuerza sobre una superficie grande de un líquido mediante pequeños aumentos de la fuerza sobre una superficie pequeña de dicho líquido, como ocurre en la *prensa hidráulica*.

El hecho de que los líquidos sean compresibles (aunque muy poco) hace que este cambio de presión en realidad se transmita como una onda con oscilaciones que se van amortiguando hasta que se restablece el equilibrio mecánico, y entonces ya se cumpliría el principio de Pascal. Lo mismo ocurre para fluidos compresibles generales, una vez alcanzado el equilibrio mecánico.

2.1.4. Paradoja de Pascal.

A primera vista puede resultar algo sorprendente el hecho de que para un fluido dado, la presión dependa exclusivamente de la profundidad y no de otras cosas como el tamaño y forma del recipiente, o pueden resultar algo extrañas situaciones como la siguiente, conocida como *paradoja de Pascal* o *paradoja hidrostática*.

Consideremos los tres recipientes de idéntica base que se presentan en la figura 2-4. Los tres están llenos de agua hasta el mismo nivel, pero sus formas son muy distintas, uno tiene la parte superior muy cerrada, uno es cilíndrico y el otro tiene la parte superior muy abierta, pero todos ellos tienen exactamente la misma base. Puede resultar algo sorprendente el hecho de que en los tres casos la fuerza ejercida sobre la base sea la misma, como se desprende de la ecuación general de la estática de fluidos.

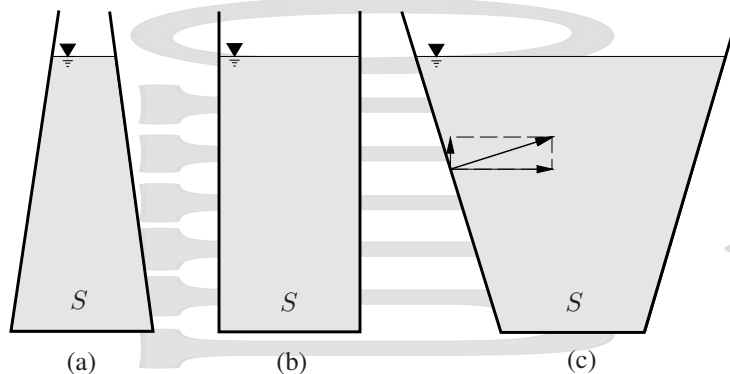


Figura 2-4: Paradoja de Pascal. A pesar de que la cantidad de fluido en los recipientes sea claramente distinta, la presión en la base (que es la misma para los tres) es la misma. Ello se explica porque hay que tener en cuenta la componente vertical de las reacciones ejercidas por las paredes del recipiente sobre el fluido.

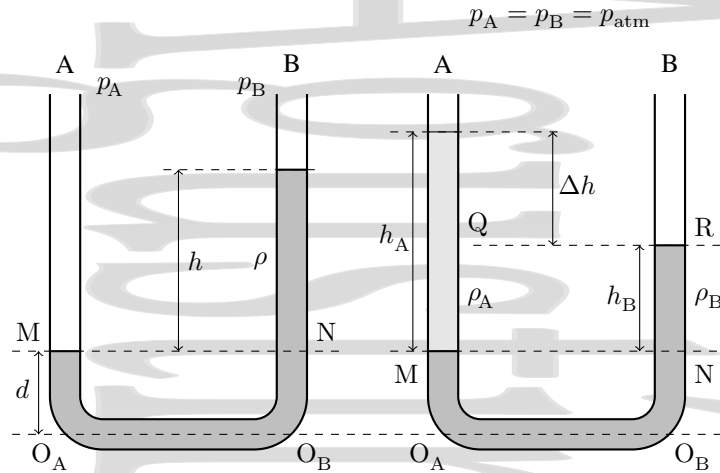


Figura 2-5: Presión en un tubo en U. (a) Caso de fluidos miscibles: la presión a la misma altura es la misma en ambas columnas si la mezcla es perfecta. (b) Caso de fluidos no miscibles: Salvo que se trate del mismo fluido y no haya fluidos intermedios, la presión a la misma altura puede no ser la misma en ambas columnas.

Sin embargo, no es tan sorprendente si se tiene en cuenta que las paredes del recipiente ejercen sobre el líquido una fuerza perpendicular a las mismas, que puede tener una componente vertical neta bien hacia abajo (primer caso), nula (segundo caso) o bien hacia arriba (tercer caso), componente vertical[†] que es necesario tener en cuenta, y que en el primer caso añade un término adicional al peso del fluido, en el segundo caso no afecta y en el tercer caso aminora el efecto del peso del fluido.

2.2. Tubos en U y manómetros.

2.2.1. Fluidos miscibles.

Consideremos el caso de un sistema de *vasos comunicantes* (o un *tubo en U*) como el que se muestra en la figura 2-5a, que contiene un fluido homogéneo de densidad ρ (que puede ser una mezcla de distintos fluidos). Aunque en la figura dibujamos un fluido no compresible, el resultado que obtenemos en este apartado en concreto es válido también para fluidos compresibles. Si denominamos O_A y O_B a dos puntos en la base que se encuentran a la misma altura y sin ningún obstáculo entre medias, está claro que la presión en ambos puntos es claramente la misma, $p_{O_A} = p_{O_B}$.

Sin embargo queda la duda acerca de lo que ocurre con las presiones en los puntos M y N, que se encuentran a una altura d por encima de O_A y O_B y que no están comunicados de una forma tan clara y directa como lo están los puntos O_A y O_B . Sin embargo, se ve enseguida que si la diferencia de presiones entre M y O_A es $p_M - p_{O_A} = -\rho g d$ y la diferencia de presiones entre M y O_B es $p_M - p_{O_B} = -\rho g d$, al tener en cuenta que $p_{O_A} = p_{O_B}$, se obtiene directamente que para un fluido en reposo,

$$p_M = p_N$$

de modo que las presiones a la misma altura han de ser iguales en ambos tubos. En particular, cuando la presión en la superficie libre del líquido homogéneo es igual en los dos tubos, el líquido debe alcanzar el mismo nivel en ambos tubos (*principio de los vasos comunicantes*). Si se añadiera más cantidad del mismo líquido el nivel subiría lo mismo en ambos tubos.

[†]Lo mismo ocurre en el caso de la fuerza sobre una pequeña superficie en la base de una presa llena de agua hasta un cierto nivel y la fuerza sobre una superficie similar en un tubo vertical de sección la de la superficie, lleno de agua hasta la misma altura de la presa.

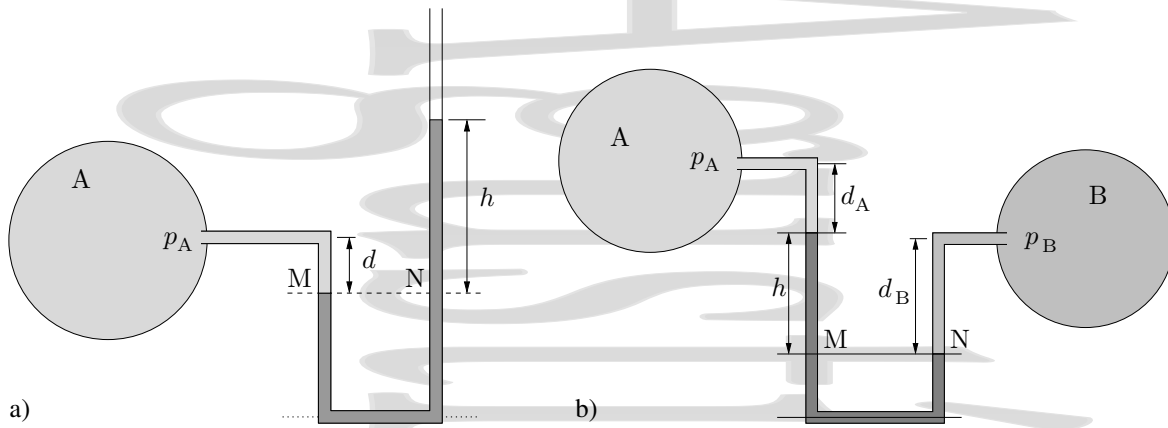


Figura 2-6: Medida de la presión con un manómetro. a) Manómetro normal. b) Manómetro diferencial.

2.2.2. Líquidos no miscibles.

Las cosas no son tan claras sin embargo, si se tienen líquidos no miscibles. Consideremos el caso de la figura 2-5b en el que se tienen dos líquidos no miscibles, de forma que el líquido en la columna B es más denso que el líquido en la columna A y ambos tubos están abiertos a la atmósfera. Sea MN la línea que pasa por la interfase entre los dos fluidos y une dos puntos a la misma altura.

Consideremos ahora dos puntos Q y R a la altura del nivel superior de la columna B. Si las dos columnas están abiertas a la atmósfera, la presión en Q será $p_Q = p_{\text{atm}} + \gamma_A d_A$. Como la presión en R es $p_R = p_{\text{atm}}$ se ve claramente que para la diferencia de alturas mostrada $p_Q > p_R$. Así, se ve que en líquidos no miscibles las presiones a la misma altura son en general distintas. Esto también es cierto si hay líquido del mismo tipo en la altura que estamos considerando, pero entre medias en el tubo hay otro líquido no miscible distinto.

El esquema de la figura 2-5-b nos permite obtener la densidad relativa de los dos fluidos. Como las presiones en la línea MN son las mismas para la columna A que para la B, al corresponder a un mismo fluido, a partir de $p_M = p_{\text{atm}} + \gamma_A h_A$ y de $p_N = p_{\text{atm}} + \gamma_B h_B$ se obtiene la relación $\gamma_A h_A = \gamma_B h_B$, lo que permite obtener la densidad relativa en función de la altura de las distintas columnas como

$$\frac{\gamma_A}{\gamma_B} = \frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{h_B}{h_A} \quad (2-4)$$

2.2.3. Manómetros.

Consideremos ahora el caso de un *manómetro* que queremos utilizar para medir la presión en un recipiente A en la forma que se muestra en la figura 2-6. Como a la altura MN hay un único fluido (sin otros fluidos intermedios), se cumplirá $p_N = p_M$. Asimismo, como la presión en M viene dada por $p_M = p_A + \gamma_A d$ y la presión en N por $p_N = p_B + \gamma h = p_{\text{atm}} + \gamma h$, se tiene que la presión en el depósito A viene dada por

$$p_A = p_{\text{atm}} + \gamma h - \gamma_A d, \quad (2-5)$$

que en el caso habitual de un fluido manométrico mucho más denso que el fluido en A (y por tanto con $\gamma \gg \gamma_A$) se reduce a

$$p_A = p_{\text{atm}} + \gamma h \quad (2-6)$$

En caso contrario es necesario utilizar la primera de las expresiones más completa. Con mercurio como fluido manométrico la aproximación normalmente va bastante bien, a no ser que se quiera medir la presión de un fluido muy denso, ya que la densidad relativa del mercurio respecto del agua es alta, de 13,6. Cuando el fluido en A es un gas, al ser $\rho_{\text{gas}} \ll \rho_{\text{líquido}}$ la aproximación sencilla (2-6) es aplicable sin correcciones.

Los manómetros suelen medir la *presión manométrica* es decir, la presión medida respecto de la presión atmosférica.

2.2.4. Manómetro diferencial.

Un razonamiento análogo se puede hacer para el *manómetro diferencial* que se muestra en la figura 2-6b, con una presión $p_M = p_A + \gamma_A d_A + \gamma h$ en M, y una presión $p_N = p_B + \gamma_B d_B$ en N, quedando una diferencia de presiones entre A y B

$$p_B - p_A = \gamma h + \gamma_A d_A - \gamma_B d_B \quad (2-7)$$

que para el caso habitual $\gamma \gg \gamma_A, \gamma_B$ queda simplemente como $p_B - p_A = \rho g h = \gamma h$

2.3. Variación de la presión con la altura en un gas perfecto en reposo.

Hemos visto que la variación diferencial de la presión con la altura viene dada por $dp = -\rho g dz = -\gamma dz$ y hemos resuelto el problema para un fluido incompresible (en el que γ y ρ no varían con la presión).

Consideremos ahora el caso de un fluido compresible, y nos restringiremos al caso en que este fluido compresible es un gas que se comporta como un gas ideal (esto ocurre con el aire atmosférico y con buena parte de sus componentes para un rango de presiones y temperaturas relativamente alto).

Obtengamos en primer lugar la dependencia de la densidad ρ de un gas ideal con la presión y la temperatura. Si tenemos en cuenta que la densidad se define como $\rho = dm/dV$ y que $n = m/\bar{M}$, con \bar{M} el peso molecular promedio del gas ideal, para un volumen infinitesimal de gas ideal dV que contiene una masa infinitesimal dm y una cantidad infinitesimal de moles $dn = dm/\bar{M}$ se tiene

$$p dV = dn RT = \frac{dm}{\bar{M}} RT$$

por lo que la densidad queda:

$$\rho(p, T) = \frac{dm}{dV} = \frac{\bar{M} p}{RT}. \quad (2-8)$$

La variación infinitesimal de la presión con la altura se puede entonces escribir como

$$dp = -\rho g dz = -\rho(p, T) g dz = -\frac{\bar{M} p}{RT} g dz \quad (2-9)$$

Agrupando variables,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\bar{M} g}{R} \frac{dz}{T}$$

que, al integrar queda

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\bar{M} g}{R} \int_0^z \frac{dz}{T}. \quad (2-10)$$

Ahora bien, en general $T = T(z)$, es una función de z y por tanto, para poder obtener la variación de la presión con la elevación es necesario conocer la función $T(z)$.

2.3.1. Atmósfera isoterma.

Consideremos primero el caso más sencillo, el de una *atmósfera isoterma* con $T = T_0 = \text{cte}$. En este caso, la expresión anterior queda

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\bar{M} g}{R} \frac{z - z_0}{T_0} \quad (2-11)$$

que da una variación exponencial de la presión con la altura

$$p = p_0 \exp \left[-\frac{\bar{M} g}{R T_0} (z - z_0) \right], \quad (2-12)$$

que es una buena aproximación para pequeñas alturas.

2.3.2. Atmósfera con dependencia lineal de la temperatura.

Para grandes alturas, la temperatura de la atmósfera disminuye de forma aproximadamente lineal hasta unos 11000 m, expresándose esta dependencia en la forma

$$T(z) = T_0 - \beta_{\text{tér}} z \quad (2-13)$$

con T_0 la temperatura absoluta al nivel del mar y $\beta_{\text{tér}}$ el denominado *gradiente térmico*. Estas magnitudes varían de un día a otro, aunque como ejemplo, unos valores típicos serían $T_0 = 288,16 \text{ K} \simeq 15^\circ\text{C}$ y $\beta_{\text{tér}} \simeq 6,50 \text{ K km}^{-1}$. La integral queda entonces

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\bar{M}g}{R} \int_0^z \frac{dz}{T_0 - \beta_{\text{tér}} z} = -\frac{\bar{M}g}{R} \left[\frac{-\ln(T_0 - \beta_{\text{tér}} z)}{\beta_{\text{tér}}} \right]_0^z = \frac{\bar{M}g}{R\beta_{\text{tér}}} \ln \frac{T_0 - \beta_{\text{tér}} z}{T_0} \quad (2-14)$$

que se puede escribir como

$$\ln \frac{p}{p_0} = \ln \left[\frac{T_0 - \beta_{\text{tér}} z}{T_0} \right]^{\frac{\bar{M}g}{R\beta_{\text{tér}}}},$$

quedando la dependencia de la presión con la altura, para una dependencia lineal de la temperatura con la altura, en la forma

$$p = p_0 \left[\frac{T_0 - \beta_{\text{tér}} z}{T_0} \right]^{\frac{\bar{M}g}{R\beta_{\text{tér}}}}, \quad (2-15)$$

2.3.3. Atmósfera tipo.

De entre los distintos casos particulares considerados, la atmósfera de densidad homogénea tiene un interés esencialmente teórico, mientras que la aproximación de atmósfera isoterma es aplicable únicamente a capas de la atmósfera con densidad constante. Esto último es aplicable a la baja estratosfera, especialmente a altas alturas, pero, salvo que se trate de capas delgadas, es difícilmente aplicable a la troposfera. La aproximación de *atmósfera adiabática* tiene una aplicación muy interesante, ya que da un límite superior para el gradiente de una atmósfera verticalmente estable y tiene la distribución de temperatura de una capa mezclada verticalmente.

La atmósfera real tiene, en general, valores inferiores del gradiente térmico, y aunque en general éste no es constante con la altura, es posible definir una atmósfera de gradiente constante (lineal) que se aproxime al caso real.

Se han definido distintas atmósferas tipo que se utilizan como referencia para una aproximación a la atmósfera real y para calibrar y utilizar altímetros. Las condiciones en que se define la *atmósfera tipo* son las siguientes,

- Atmósfera de aire seco puro con una composición química constante en sentido vertical y peso molecular promedio $\bar{M} = 28,9644 \text{ g}$.
- El comportamiento del gas puede aproximarse por el de un gas ideal. Esto es razonable para $p \simeq 1 \text{ atm}$.
- Se utiliza como valor estándar de la aceleración el de la gravedad a nivel del mar, $g \simeq 9,80 \text{ ms}^{-2}$.
- El sistema se encuentra en equilibrio hidrostático.
- Se toma como referencia la temperatura $T_0 = 15^\circ\text{C}$ a nivel del mar y la presión $p_0 = 1 \text{ atm}$.
- Para alturas hasta los 11000 m (tropopausa), se considera constante el gradiente térmico y de valor $\beta_{\text{tér}} = -dT/dz = 6,5 \text{ K km}^{-1}$.
- Para alturas mayores de 11000 m (estratosfera) y hasta 20000 m se considera la temperatura constante e igual a $-56,5^\circ\text{C}$. A partir de esa altura se supone un gradiente térmico constante de valor $-1,0 \text{ K km}^{-1}$ hasta los 32000 m.

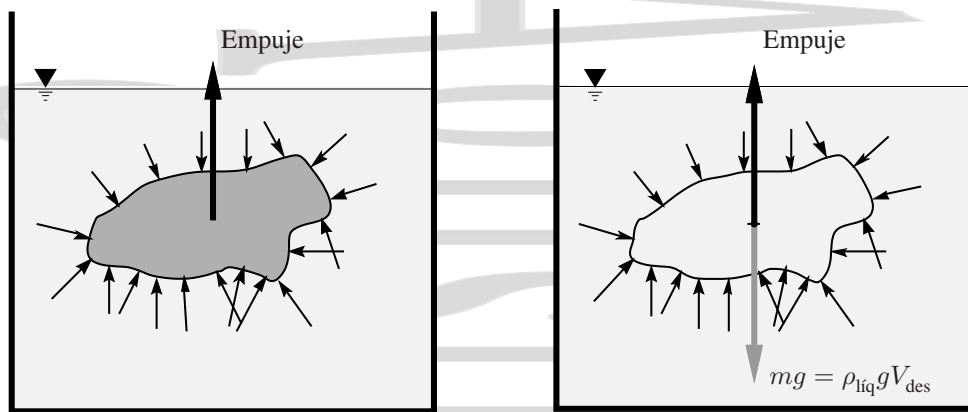


Figura 2-7: El empuje que sufre un cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido es igual al peso del fluido desalojado y actúa verticalmente a través del centro de gravedad de dicho fluido desalojado.

2.4. Equilibrio de un cuerpo sumergido.

2.4.1. Flotación. Principio de Arquímedes.

Consideremos un cuerpo parcial o totalmente sumergido en un fluido en reposo (líquido o gas). Este fluido ejerce una fuerza sobre cada parte de la superficie exterior del cuerpo sumergido en el fluido, más intensa cuanto mayor es la profundidad ya que la presión aumenta con la profundidad. Se denomina *empuje* sobre el cuerpo sumergido a la fuerza total hacia arriba ejercida por el fluido sobre el mismo.

Calculemos el valor de esta fuerza. Si se considera la superficie cerrada que delimita el cuerpo sumergido, la distribución de presiones en los distintos puntos de dicha superficie dará lugar a una distribución de fuerzas cuya resultante es precisamente el empuje que estamos calculando. Consideremos ahora que en el recipiente hubiera el mismo fluido y hasta el mismo nivel que cuando estaba el cuerpo y dentro de este fluido una superficie cerrada imaginaria que coincida con la superficie exterior del cuerpo que está sumergido en el caso real. Como la presión en un punto de un fluido en reposo depende únicamente de la profundidad, la presión en todos los puntos de esta superficie imaginaria es la misma que habría en los puntos correspondientes de la superficie real, por lo que la fuerza resultante que ejerce el fluido de fuera de la superficie sobre el fluido de dentro de la superficie será la misma que ejerce el fluido sobre la parte sumergida del cuerpo. Ahora bien, ahora es fácil hacer el cálculo, ya que el fluido se encuentra en equilibrio mecánico y por tanto la fuerza que compensa el empuje es el peso del propio fluido dentro de la superficie imaginaria, actuando verticalmente a través de su *centro de gravedad*.

¿Dónde estará aplicada esa fuerza? Volvamos de nuevo al caso del fluido con la superficie cerrada imaginaria. Si el sistema está en equilibrio mecánico no habrá rotación y para ello es necesario que los puntos de aplicación del empuje (*centro de empuje* o *centro de carena*) y del peso del fluido desalojado sean el mismo. Por tanto, se tiene el *principio de Arquímedes*,

Un cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido es empujado hacia arriba con una fuerza igual al peso del fluido desalojado, que actúa verticalmente a través del centro de gravedad del fluido antes de ser desplazado.

Frecuentemente se tiene la idea de que este empuje actúa a través del centro de gravedad del cuerpo sumergido. En general esto es incorrecto, como se ve en el ejemplo mostrado en la figura 2-8. En ella se muestra un cuerpo formado por dos esferas, una hueca y otra maciza, unidas por una varilla de peso despreciable, a la manera de una especie de peculiar pesa de gimnasia. Si el peso de la esfera hueca es despreciable frente al de la maciza, el centro de gravedad del conjunto estará prácticamente en el centro de la esfera maciza. ¿Qué ocurriría si el centro de aplicación del empuje estuviera también en el centro de gravedad del cuerpo? En ese caso, ambas fuerzas estarían aplicadas sobre el mismo punto por lo que no se produciría rotación de la pesa hasta que la bola pesada quede abajo y la ligera arriba, contra lo que muestra la experiencia. Por el contrario, en el caso real en el que el empuje actúa sobre el centro de gravedad del fluido desalojado (a través del *eje de empuje*), este par de fuerzas se produce en el sentido adecuado (como debe ser).

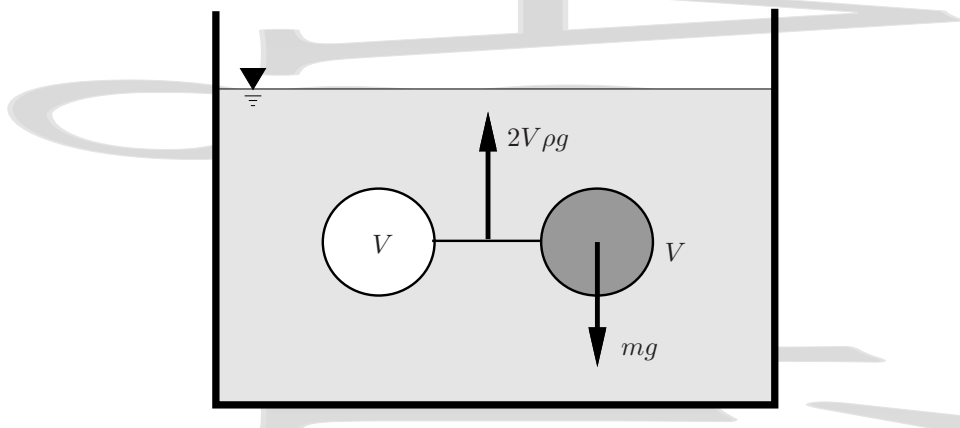


Figura 2-8: En el sistema de dos esferas, una hueca y otra maciza, unidas por una varilla de peso despreciable, si el punto de aplicación del empuje estuviera en el centro de gravedad del cuerpo el conjunto no giraría como sabemos que hace. El empuje está aplicado en el centro de gravedad del fluido desalojado.

2.4.2. Estabilidad de un cuerpo semisumergido.

Al estudiar un cuerpo semisumergido no solamente es importante conocer el valor del empuje, sino cómo actúa éste. Así, es de gran importancia conocer la capacidad del cuerpo flotante de recuperar el estado de equilibrio una vez sacado del mismo. No nos sirve sólo que el barco flote, sino la posición en que debe hacerlo.

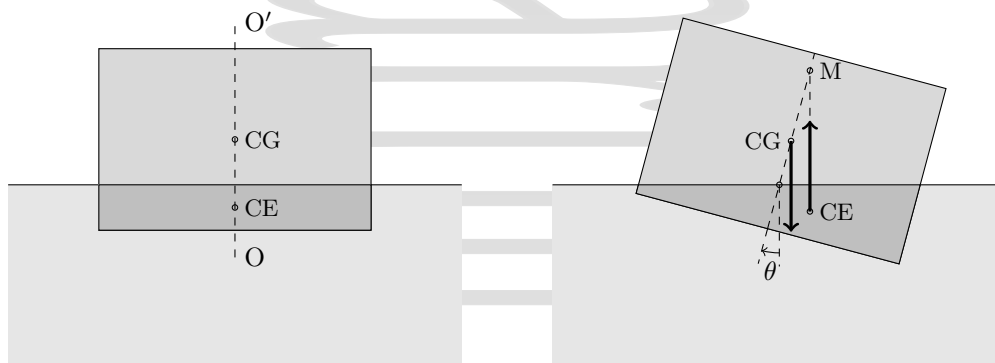


Figura 2-9: Estabilidad de un cuerpo semisumergido. Para que el cuerpo vuelva a su posición de equilibrio y no vuelque ante un giro es necesario que el par de fuerzas peso/empuje sea un par recuperador como en el caso de la figura.

La estabilidad longitudinal (a lo largo) de los barcos normalmente es muy considerable, por lo que nos centraremos en la estabilidad transversal (frente a giros a babor o estribor en torno a un eje horizontal). Consideremos el cuerpo semisumergido cuya sección transversal se esquematiza en la figura 2-9, al que se supone una dimensión longitudinal mayor que las dimensiones transversales que se muestran en la figura.

Denominamos *eje de flotación* OO' al eje vertical que pasa por el centro de gravedad y por el centro de empuje del cuerpo cuando éste se encuentra en la posición de equilibrio, en la que tanto el centro de gravedad como el de empuje deben estar sobre el mismo eje.

Cuando el centro de gravedad del cuerpo semisumergido se encuentra por debajo del centro de empuje se produce siempre un par recuperador que intenta llevar al cuerpo a su posición inicial de equilibrio.

Sin embargo, también es posible tener un par recuperador en algunos casos en los que el centro de gravedad del cuerpo se encuentra por encima del centro de empuje. Cuando como consecuencia de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, éste se inclina un cierto ángulo α , una parte del cuerpo ha salido del agua y otra parte que antes estaba fuera ha entrado (figura 2-9). La posición del centro de gravedad del cuerpo no ha variado en este giro, pero el centro de gravedad del líquido desplazado sí, quedando más hacia la derecha. Así, el eje de empuje se desplaza, en este caso

hacia la derecha. Si este eje de empuje queda a la derecha del centro de gravedad se produce un par recuperador que tiende a devolver el cuerpo a su posición original, mientras que si queda a la izquierda el par fomentará el vuelco del cuerpo.

Denominamos *metacentro* M al punto de cruce del eje de empuje y el eje de flotación del cuerpo, y *altura metacéntrica* h a la distancia entre el metacentro y el centro de gravedad a lo largo del eje de flotación.

La altura metacéntrica es una magnitud característica de la sección transversal del cuerpo para un peso dado y su valor un indicador de la estabilidad del cuerpo. Valores típicos para barcos comerciales están entre 0,3 y 0,8 m. El cálculo de la altura metacéntrica es, en general, un trabajo pesado.

Dependiendo de la posición relativa del metacentro y el centro de gravedad se tienen 3 casos:

Equilibrio estable:

El metacentro se encuentra por encima del centro de gravedad. De esta forma el par de fuerzas es un par restaurador que lleva al barco a su posición inicial. Dependiendo de la forma del cuerpo y de las condiciones concretas de carga, si el ángulo es grande el cuerpo podría llegar a volcar. En este caso, el equilibrio sería en realidad *metaestable*.

Equilibrio indiferente:

El metacentro y el centro de gravedad coinciden. No hay par de fuerzas.

Equilibrio inestable:

El metacentro se encuentra por debajo del centro de gravedad. El par de fuerzas es un par de vuelco.

Así, la estabilidad del cuerpo será tanto mayor cuanto más bajo se encuentre el centro de gravedad y cuanto mayor sea la altura metacéntrica. Por esta razón los barcos ligeros se lastran con plomo en la quilla y en general se intenta colocar los elementos pesados del barco (maquinaria, etc. . .) en la parte más baja del mismo.

Si la superficie libre del líquido no se mueve, cuando se produce un giro θ a partir de las condiciones de equilibrio estable el cuerpo oscilará con una cierta frecuencia en torno a dichas condiciones de equilibrio. El problema es similar al de un péndulo compuesto que oscila en torno a dicho eje. La ecuación dinámica de rotación, con momentos de fuerzas y de inercia tomados desde el metacentro[†] será

$$I_M \alpha + h mg \sin \theta = I_M \frac{d^2 \theta}{dt^2} + h mg \sin \theta = 0$$

con α la aceleración angular, I_M el momento de inercia respecto del eje perpendicular al plano de oscilación que pasa por el metacentro y h la altura metacéntrica. Para pequeñas oscilaciones $\sin \theta \simeq \theta$ con el ángulo en radianes y se tiene la conocida ecuación diferencial del oscilador armónico,

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{h mg}{I_M} \theta = 0 \quad (2-16)$$

cuya solución es una función armónica de frecuencia angular

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{h mg}{I_M}} \quad (2-17)$$

Así, en condiciones de aguas tranquilas y pequeños ángulos el periodo de oscilación será

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_M}{mgh}}. \quad (2-18)$$

Al disminuir el producto del peso mg por la altura metacéntrica h el periodo aumenta y por tanto el balanceo es algo menos desagradable. Sin embargo en la práctica esto implica una disminución de la estabilidad.

[†] El momento del empuje desde el metacentro es nulo. Nótese que el giro no es, en general, en torno al metacentro.

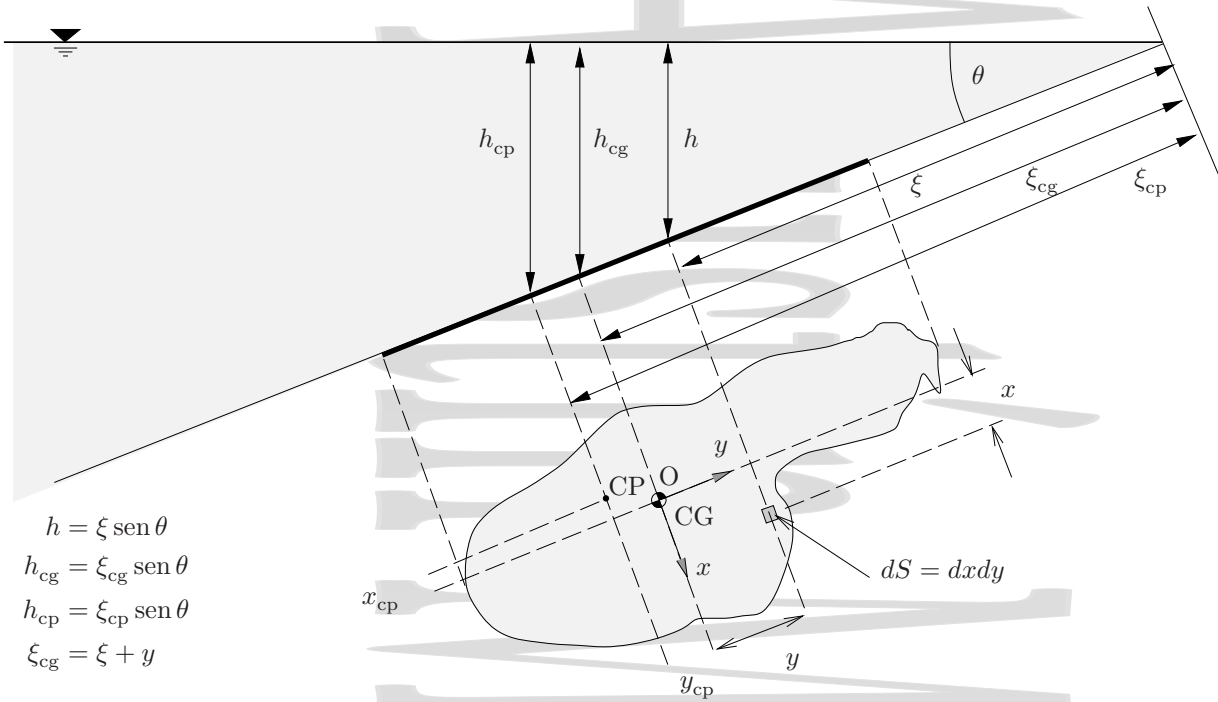


Figura 2-10: Cálculo de la fuerza sobre una superficie plana. Consideramos una superficie plana que forma un ángulo θ con la superficie libre del líquido.

2.5. Fuerzas hidrostáticas sobre superficies.

2.5.1. Fuerza sobre superficies planas.

Consideremos una placa plana de forma arbitraria que se encuentra sumergida completamente en el líquido y forma un ángulo θ con la superficie libre del mismo, como se muestra en la figura 2-10, y calculemos la fuerza hidrostática que actúa sobre dicha superficie.

Valor de la fuerza resultante.

Tomamos como sistema de referencia el sistema de coordenadas $[x, y]$ centrado en el *centro de gravedad* de la superficie. La fuerza total que actúa sobre la placa se expresa como

$$F_S = \int_S p dS = \int_S (p_{atm} + \rho g h) dS = p_{atm} S + \rho g \int_S h dS$$

Si tenemos en cuenta que $h = \xi \sen \theta$ y que θ se mantiene constante sobre la placa, la fuerza sobre la misma queda

$$F_S = S p_{atm} + \rho g \int_S \xi \sen \theta dS = S p_{atm} + \rho g \sen \theta \int_S \xi dS$$

Ahora bien, si recordamos la definición de la posición del *centro de gravedad*[†] o *centroide* de una superficie plana $S \xi_{cg} = \int_S \xi dS$, la expresión anterior se convierte en

$$F_S = S p_{atm} + \rho g \sen \theta S \xi_{cg} = S p_{atm} + \rho g S h_{cg} = \underbrace{(p_{atm} + \rho g h_{cg})}_{p_{cg}} S$$

[†] Aunque utilizaremos la expresión “centro de gravedad de una superficie plana” dado lo habitual de su uso, hay que recalcar que cuando se refiere a una superficie esta expresión tiene unas características exclusivamente geométricas que dependen únicamente de la forma de la superficie plana y no de la acción de la fuerza gravitatoria a pesar de utilizar la palabra “gravedad”. Es decir, en rigor esta expresión se refiere al *centro de superficie* (análogo en una superficie plana al *centro de volumen* en un cuerpo, que también depende únicamente de la forma del mismo). En esos dos últimos casos también se utiliza la palabra *centroide*, bien de un cuerpo, bien de una superficie plana.

que es simplemente

$$F_S = p_{cg} S \quad (2-19)$$

La fuerza total que actúa sobre una superficie plana cualquiera sumergida en un fluido uniforme en reposo es igual a la presión que hay en el centro de gravedad de dicha superficie multiplicada por su área, con independencia de la forma de la superficie plana o de su inclinación θ .

Punto de aplicación de la fuerza resultante.

Imaginemos un recipiente que contiene un líquido y sobre éste una superficie S que se encuentra libre y encaja perfectamente en la pared del recipiente. Al poder moverse la superficie, ésta será empujada por el líquido y se saldrá. Para evitarlo habría que aplicar sobre la superficie una fuerza normal a la misma de magnitud la fuerza que ejerce el líquido sobre la superficie. Para que además la superficie no gire, esta fuerza debe aplicarse en un punto determinado de forma que el momento total del sistema de fuerzas ejercido por el líquido sobre la superficie se compense con el momento de la fuerza equivalente aplicada en ese punto. Este punto es el *centro de presiones*, que es el *centro de vectores paralelos* de este sistema de fuerzas que actúa sobre la placa.

Cuanto mayor es la profundidad, mayor es la presión. Por tanto, el punto de actuación de la fuerza total resultante (centro de presiones) no coincide con el *centro de gravedad*, sino que debe encontrarse más abajo. La línea de acción de esta fuerza debe pasar precisamente por este centro de presiones. Para calcular la posición (x_{cp}, y_{cp}) del centro de presiones[†] se suman los momentos de las fuerzas elementales $p dS$ respecto del centro de gravedad y se igualan con el momento (respecto del centro de gravedad) de la fuerza resultante aplicada en el centro de presiones. Obtenemos el resultado para cada una de las componentes del momento,

Componente x del momento: Para obtener la componente y de la posición del centro de presiones utilizaremos la componente del momento en la dirección x , que viene dada por

$$F \cdot y_{cp} = \int_S y p dS \quad (2-20)$$

Como $p = p_{atm} + \rho g h = p_{atm} + \rho g \xi \sin \theta$ se tiene a su vez que

$$F \cdot y_{cp} = \int_S y p dS = \int_S y (p_{atm} + \rho g \xi \sin \theta) dS = p_{atm} \int_S y dS + \rho g \sin \theta \int_S y \xi dS$$

El primer sumando es cero por la definición del centro de gravedad, y como $y = \xi_{cg} - \xi$ se tiene, con $\xi = \xi_{cg} - y$

$$F \cdot y_{cp} = \rho g \sin \theta \left[\xi_{cg} \int_S y dS - \int_S y^2 dS \right]$$

De nuevo el primer sumando es cero por la definición de centro de gravedad de una superficie, por lo que la componente x del momento es

$$F \cdot y_{cp} = -\rho g \sin \theta I_{xx} \quad (2-21)$$

con

$$I_{xx} = \int_S y^2 dS \quad (2-22)$$

el denominado *momento de inercia de la sección plana* (del área de la placa) respecto de su eje horizontal x , calculado en el plano de la placa. Como $F = p_{cg} S$, la distancia en el plano de la placa a la que se encuentra el centro de presiones respecto del centro de gravedad, viene dada por

$$y_{cp} = -\frac{\rho g \sin \theta}{F} I_{xx} = -\frac{\rho g \sin \theta}{p_{cg} S} I_{xx} \quad (2-23)$$

[†] Nótese que en realidad estamos obteniendo la posición del centro de vectores paralelos para la distribución de fuerzas paralelas que actúa sobre la placa, dado por

$$F \vec{r}_{cp} = \int_S (dF) \vec{r} = \int_S p dS \vec{r}$$

El signo $-$ indica que el centro de presiones está por debajo del centro de gravedad, y como se puede ver, esta posición depende de la inclinación θ .

Al aumentar la profundidad a la que se encuentra la placa, y_{cp} se acerca al centro de gravedad, ya que todos los factores que intervienen en (2-23) permanecen constantes excepto p_{cg} que aumenta.

Componente y del momento: Para obtener la componente x de la posición del centro de presiones utilizaremos la componente del momento en la dirección y , que viene dada por

$$F \cdot x_{cp} = \int_S x p dS \quad (2-24)$$

que, al igual que antes se convierte en

$$F \cdot x_{cp} = \int_S x p dS = \int_S x (p_{atm} + \rho g \xi \sen \theta) dS = p_{atm} \int_S x dS + \rho g \sen \theta \int_S x \xi dS.$$

El primer sumando también es cero por la definición de centro de gravedad y teniendo de nuevo en cuenta que $y = \xi_{cg} - \xi$ se tiene, al sustituir $\xi = \xi_{cg} - y$

$$F \cdot x_{cp} = \rho g \sen \theta \left[\xi_{cg} \int_S x dS - \int_S x y dS \right],$$

lo que da, para la componente x de la posición del centro de presiones

$$F \cdot x_{cp} = -\rho g \sen \theta I_{xy} \quad (2-25)$$

con

$$I_{xy} = \int_S x y dS \quad (2-26)$$

conocido como el *producto de inercia de la sección plana*. Dividiendo por la fuerza $F = p_{cg} S$, la componente x de la posición del centro de presiones respecto del centro de gravedad en el sistema de coordenadas xy situado sobre la placa es:

$$x_{cp} = -\frac{\rho g \sen \theta}{F} I_{xy} = -\frac{\rho g \sen \theta}{p_{cg} S} I_{xy} \quad (2-27)$$

El producto de inercia puede tener cualquier signo, al contrario que el momento de inercia, que puede ser sólo positivo. Dependiendo de este signo el centro de presiones se encontrará a un lado u otro del centro de gravedad. Si $I_{xy} > 0$, $x_{cp} < 0$, mientras que si I_{xy} es negativo, $x_{cp} > 0$. En el caso particular en el que $I_{xy} = 0$, se tiene que $x_{cp} = 0$ y, por tanto, el centro de presiones está directamente debajo del centro de gravedad sobre el eje y en el plano de la placa.

La fuerza que normalmente interesa no es la fuerza que ejerce exclusivamente el líquido sobre la superficie plana (dada por 2-19, con valor $p_{cg} = p_{atm} + \rho g h_{cg}$ y situada según (2-21) y (2-25)) sino la *fuerza neta* que actúa sobre dicha superficie. Para ello hay que tener en cuenta que normalmente la presión atmosférica p_{atm} actúa sobre ambos lados de la placa (es decir, también sobre la cara interna de un barco o cara seca de una compuerta o de una presa) y por tanto, la presión respecto de la presión atmosférica o *presión manométrica* se puede escribir[†] como $p_{cg} = \rho g h_{cg}$ y la fuerza neta como $F = \rho g h_{cg} S$. A la hora de calcular el centro de presiones de la fuerza neta resultante, las expresiones (2-23) y (2-27) pueden escribirse como

$$y_{cp} = -\frac{I_{xx} \sen \theta}{h_{cg} S} \quad (2-28)$$

$$x_{cp} = -\frac{I_{xy} \sen \theta}{h_{cg} S}, \quad (2-29)$$

válidas únicamente cuando se obtiene la fuerza neta sobre la superficie y tanto la superficie libre del líquido como el otro lado de la placa están a la presión atmosférica.

[†]Nótese que esto no afecta a la validez de las ecuaciones (2-23) y (2-27) ya que en el proceso de obtención de las mismas el término con p_{atm} desaparece en el segundo miembro.

2.5.2. Fuerza sobre superficies curvas.

La fuerza total ejercida por el agua sobre una superficie curva vendría dada por la integral de las fuerzas elementales que ejerce el agua a través de cada uno de los elementos de superficie infinitesimales de dicha superficie curva,

$$\vec{F} = - \int_S p d\vec{S}$$

Sin embargo, también podemos obtener el valor de dicha fuerza neta sin recurrir a la integración explícita y posiblemente compleja anterior. Para ello, hay que tener en cuenta que dicha fuerza es la combinación de dos componentes, una horizontal y otra vertical.

La componente horizontal se calcula obteniendo la fuerza que actuaría sobre las proyecciones de la superficie curva sobre los planos coordenados verticales, lo que nos daría su valor y su línea de aplicación a través del correspondiente centro de presiones. Si al proyectar la superficie total sobre los planos verticales hay alguna parte con dos proyecciones, correspondiendo cada una a distintos sentidos de la fuerza horizontal, no se considerará esa parte. El caso límite de esta última circunstancia sería el de un cuerpo completamente sumergido que se vio al tratar el empuje en la sección 2.4.1, en el que una parte se proyectaría sobre un plano y la otra sobre el plano paralelo del lado opuesto, cancelándose ambas y quedando únicamente el empuje.

Para obtener la componente vertical hay que tener en cuenta si la superficie mira hacia arriba, hacia abajo o es un caso intermedio. Si la superficie mira hacia arriba, la componente vertical se obtiene directamente a partir del peso del líquido situado sobre la superficie curva actuando a través del dentro de gravedad del líquido. Si la superficie mira hacia abajo se obtendría como el empuje vertical del líquido sobre la misma, igual al peso del líquido “desalojado” (el que estaría sobre la superficie curva), actuando a través del dentro de gravedad del líquido desalojado. En los casos intermedios se utilizaría una combinación de los dos procedimientos después de un análisis preliminar. En las figuras 2-11, 2-12 y 2-13 se muestran algunos ejemplos de análisis de fuerzas netas sobre superficies curvas.

Cuando ambas fuerzas actúan en el mismo plano (como por ejemplo ocurre cuando hay un plano de simetría vertical Π en el problema) se tienen dos vectores concurrentes con una resultante que pasa por el punto de concurrencia. Cuando no actúan en el mismo plano el problema se complica y aparecería un momento resultante además de una fuerza resultante.

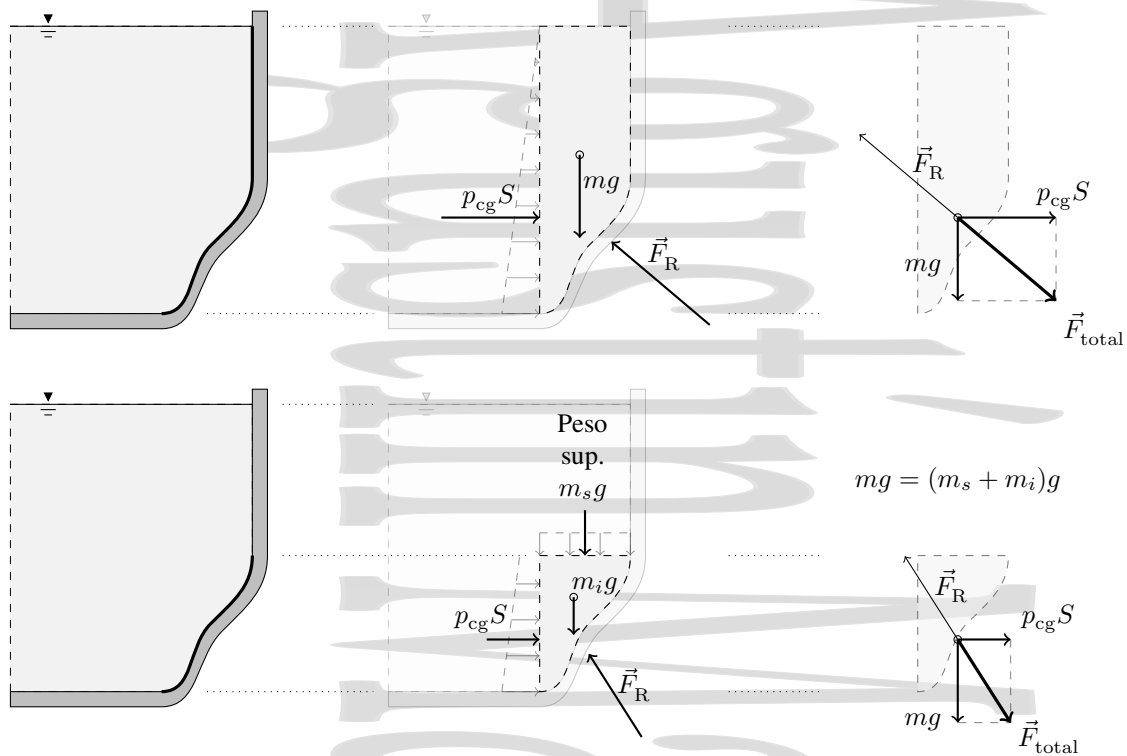


Figura 2-11: Fuerzas sobre superficies curvas sumergidas mirando hacia arriba. Se muestran dos ejemplos, uno en el que la superficie llega hasta la superficie libre y otro en el que la superficie es una parte de la anterior que está por debajo de la superficie libre. Ambas superficies se muestran en trazo más grueso. En este caso concreto en ambos casos la componente vertical neta es la misma ya que la diferencia entre ambas superficies corresponde a un tramo vertical teniendo el resto la misma forma y profundidad.

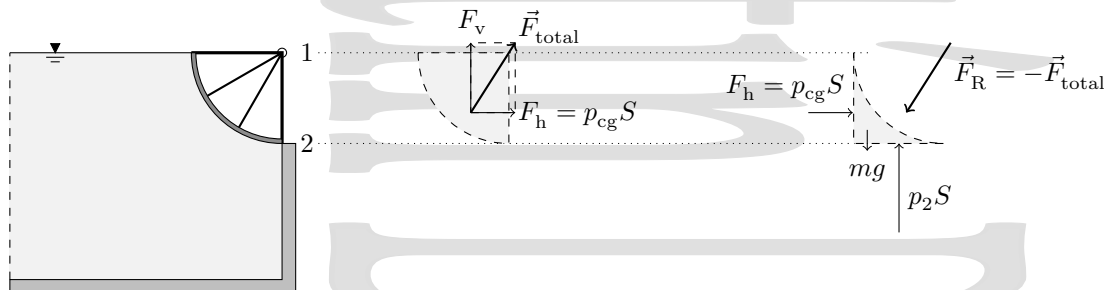


Figura 2-12: Fuerzas sobre superficies curvas sumergidas mirando hacia abajo. El cálculo se plantea de dos formas, bien como combinación de una componente horizontal y una vertical debida al empuje del líquido “desalojado” o bien mediante las ecuaciones de equilibrio mecánico del cuerpo libre de peso mg de la figura, en el que se sustituye el efecto del resto por las fuerzas equivalentes, fuerza horizontal F_h , fuerza vertical p_1S y fuerza de reacción de la compuerta sobre el cuerpo $\vec{F}_R = -\vec{F}_{total}$.

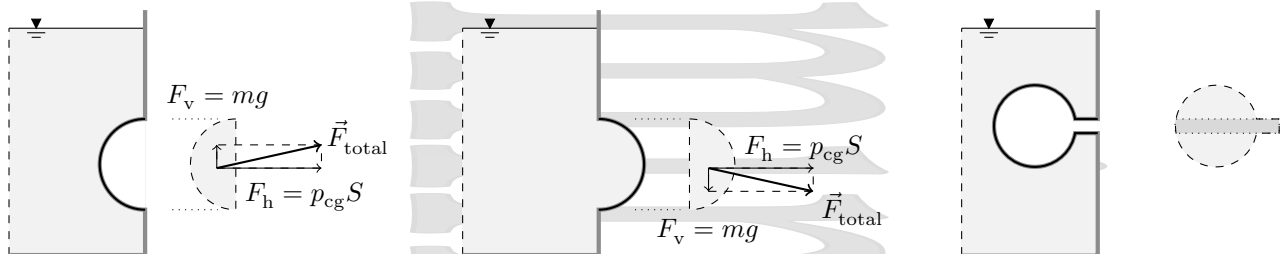


Figura 2-13: Ejemplos de cálculo de la fuerza sobre una superficie curva (en negro) con caras mirando hacia arriba y hacia abajo, para caras entrantes y salientes del líquido, y para un caso más complejo. En este último, se utilizaría el peso de la parte encerrada en una línea de trazos (en los dos grises, claro y oscuro) para obtener la componente vertical a través del empuje, pero para la parte horizontal se utilizaría únicamente la parte encerrada en una línea de puntos (en un gris más oscuro).

Capítulo 3

Introducción a la dinámica de fluidos. Dinámica de fluidos perfectos.

Índice del capítulo

3.1. Análisis del movimiento de un fluido.	23
3.1.1. Aproximaciones clásicas al estudio de los fluidos.	23
3.1.2. Tipos de flujo.	24
3.1.3. Senda, línea de corriente y de traza. Tubo de flujo.	25
3.2. Ecuación de continuidad.	26
3.2.1. Forma integral.	26
3.2.2. Forma diferencial.	28
3.3. Fuerza y aceleración en un elemento de fluido.	30
3.3.1. Fuerza neta sobre un elemento de un tubo de flujo. Variación de la cantidad de movimiento.	30
3.3.2. Ecuaciones de movimiento microscópicas de un fluido perfecto. Aceleración. Ecuación de Euler.	31
3.3.3. Aplicación a un fluido en reposo.	32
3.3.4. Aplicación a un fluido en reposo en un sistema de referencia no inercial.	33
3.3.5. Vorticidad.	35
3.4. Conservación de la energía en un fluido perfecto. Ecuación de Bernoulli.	36
3.4.1. Obtención a partir de las ecuaciones de Euler.	36
3.4.2. Obtención a través de la conservación de la energía.	38
3.5. Aplicaciones de las ecuaciones anteriores a fluidos perfectos.	39
3.5.1. Velocidad de salida por un orificio (teorema de Torricelli).	39
3.5.2. Tiempo de vaciado de un gran depósito abierto a la atmósfera.	40
3.5.3. Presión dinámica y presión estática. Tubo de Pitot.	41
3.5.4. Efecto Venturi. Venturímetro.	42

La *Dinámica de Fluidos* es la rama de la Mecánica de Fluidos que se ocupa de analizar el comportamiento de fluidos en movimiento. En este primer tema veremos algunas generalidades sobre el análisis del movimiento de un fluido junto con algunas relaciones generales y pasaremos posteriormente a tratar un modelo simplificado de fluido en el que no se tiene en cuenta el efecto de las fuerzas de rozamiento en el movimiento del mismo (*fluido perfecto*).

3.1. Análisis del movimiento de un fluido.

3.1.1. Aproximaciones clásicas al estudio de los fluidos.

A la hora de abordar el estudio de los fluidos, surgen dos aproximaciones clásicas, la de Euler y la de Lagrange.

Método de Lagrange: El *método de Lagrange* constituye una generalización directa de la mecánica del punto material. Se estudia un volumen pequeño del fluido y se sigue el movimiento de cada una de las partículas (de coordenadas x, y, z) en función del tiempo t , a través de la ecuación que describe la trayectoria de cada una de las partículas. El principal inconveniente de este sistema es que hacen falta una gran cantidad de ecuaciones para describir el movimiento del sistema, por lo que en la práctica no es útil.

Método de Euler: En la *aproximación de Euler* se desiste de describir el movimiento del fluido mediante la historia de cada una de las partículas individuales. En su lugar se especifica el movimiento del fluido en cada punto del flujo por la densidad $\rho(x, y, z, t)$, la presión $p(x, y, z, t)$ y la velocidad $\vec{v}(\vec{r}, t)$ de las partículas del mismo en ese punto, como una función del tiempo y del espacio. En otras palabras, en este método se estudia un punto del espacio y como es el movimiento del fluido en ese punto en función del tiempo. Las herramientas de trabajo serán las típicas de la Teoría de Campos, con un campo de presiones, un campo de velocidades y un campo de densidades.

En este contexto, cuando hablamos de una partícula del fluido nos referimos en realidad a un pequeño elemento de volumen del mismo, que se mueve con el flujo.

3.1.2. Tipos de flujo.

Atendiendo a las características del flujo, éste puede clasificarse de acuerdo con distintos criterios.

Flujo estacionario/no estacionario. Se dice que el flujo es *estacionario* si la velocidad $\vec{v}(\vec{r})$ y la densidad $\rho(\vec{r})$ del flujo en un punto no dependen del tiempo y *no estacionario* en caso contrario. Esto no quiere decir que la velocidad y la densidad deban ser las mismas en dos puntos distintos, sino sólo que en un mismo punto no deben variar con el tiempo.

Flujo irrotacional/rotacional. Se dice que el flujo es *irrotacional* cuando el elemento del fluido en un punto dado no tiene una velocidad angular neta alrededor de dicho punto y que es *rotacional* en caso contrario. Un fluido que circula a través de una tubería recta de sección uniforme sería un ejemplo simple de flujo irrotacional, mientras que un remolino de un río sería un ejemplo de flujo rotacional.

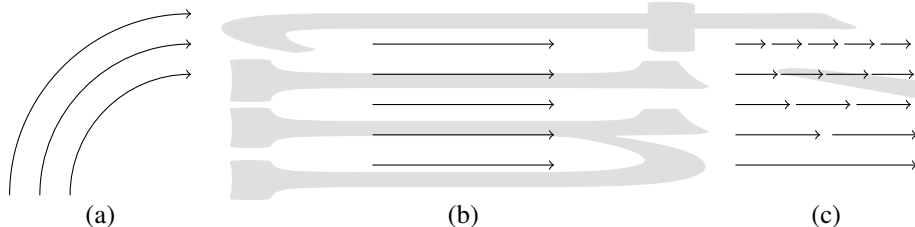


Figura 3-1: Ejemplos simples de líneas de corriente para flujo rotacional (a) e irrotacional (b). En otros casos no es tan sencillo de observar el carácter, por ejemplo en el caso (c) el flujo es rotacional.

Flujo compresible/incompresible. Se dice que el flujo es *compresible* si la densidad ρ varía en el mismo, como por ejemplo ocurre en los gases en el caso más general, mientras que se dice que el flujo es *incompresible* cuando la densidad ρ apenas varía como es el caso de los líquidos. Nótese que es posible tener una región de flujo aproximadamente incompresible aunque el fluido en movimiento en sí sea un fluido compresible siempre que a lo largo del flujo en la región considerada la densidad ρ sea prácticamente la misma en todos los puntos.

Flujo viscoso/no viscoso. Se dice que el flujo es *viscoso* cuando aparecen en él importantes fuerzas de rozamiento que no se pueden despreciar. Como consecuencia de estas fuerzas de rozamiento aparecen unas fuerzas tangenciales entre las capas del fluido en movimiento relativo y hay una disipación de energía mecánica. Por el contrario se dice que el flujo es *no viscoso* cuando estas fuerzas de rozamiento son muy pequeñas o bien no se tienen en cuenta.

Todos los flujos son en mayor o menor medida viscosos, pero el modelo de flujo no viscoso es una simplificación muy útil para empezar a entender el movimiento de los fluidos e incluso para tratar algunos casos reales.

3.1.3. Senda, línea de corriente y de traza. Tubo de flujo.

Vamos a definir ahora una serie de líneas que nos permitirán describir el movimiento de un fluido. Estas son la senda, la traza o línea de traza y la línea de corriente o línea de flujo. En general, cada una de éstas líneas es distinta de las otras, pero en el caso de un flujo estacionario las tres coinciden.

Senda.

Se denomina *senda* al camino seguido realmente por una partícula de fluido. La senda se define para una partícula a lo largo del tiempo. Su carácter es fundamentalmente experimental y se obtendría experimentalmente soltando una partícula marcador y haciendo una fotografía a obturador abierto durante el tiempo del estudio.

Para obtener analíticamente la senda integráramos el campo de velocidades para obtener las ecuaciones paramétricas $[x(t), y(t), z(t)]$ de la senda para un elemento genérico del flujo que en un cierto instante de referencia pasa por un punto de referencia dado (lo que nos permite obtener las constantes de integración). Si eliminamos el tiempo entre las distintas ecuaciones obtenemos la ecuación de la senda.

Línea de traza.

Se denomina *línea de traza* al lugar geométrico de las partículas que en instantes sucesivos pasaron por un punto dado. Su carácter es también fundamentalmente experimental y en la práctica por ejemplo se obtendría inyectando de forma continua en un punto fijo del flujo una serie de partículas marcadas y tomando una fotografía.

Para obtener analíticamente la ecuación de la traza debemos previamente obtener la familia de constantes de integración correspondientes a las sendas de las partículas que en instantes t_t anteriores al instante genérico t considerado pasaron por el punto (x_0, y_0, z_0) de referencia. Sustituyendo estos valores en las ecuaciones paramétricas de la senda tendríamos las sendas de cada una de estas partículas y eliminando t_t tendríamos la ecuación de la traza, en el instante t , de las partículas que en instantes previos pasaron por (x_0, y_0, z_0) .

Línea de corriente o línea de flujo.

Se define la *línea de corriente* o *línea de flujo* como una línea que en un instante dado es tangente al vector velocidad en cada punto. Es importante recalcar que la línea de corriente está definida para un instante dado, mientras que tanto la senda como la línea de traza contienen información de otros instantes.

Al contrario de las dos anteriores, de carácter básicamente experimental, la línea de corriente tiene un profundo sentido matemático y representa las *líneas de campo* del campo de velocidades.

Para su obtención experimental se extenderían en el flujo un conjunto de partículas marcadoras y se tomaría una fotografía del conjunto “casi” instantánea (obturador abierto durante un breve periodo de tiempo), de modo que en ésta se aprecian para cada partícula líneas pequeñas que marcan la dirección (ángulo de la línea) y el módulo de la velocidad (relacionado con la longitud de la línea).

Como la velocidad debe ser tangente en cada punto a la línea de flujo, debe cumplirse $\vec{v} \times d\vec{r} = 0$ con $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$. Así, éstas deben cumplir

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = \frac{dr}{v}, \quad (3-1)$$

que si v_x, v_y, v_z son conocidas en función de la posición y el tiempo, pueden integrarse para dar la ecuación de la línea de corriente que en un determinado instante pasa por un punto dado. Nótese que esta integración puede ser muy compleja.

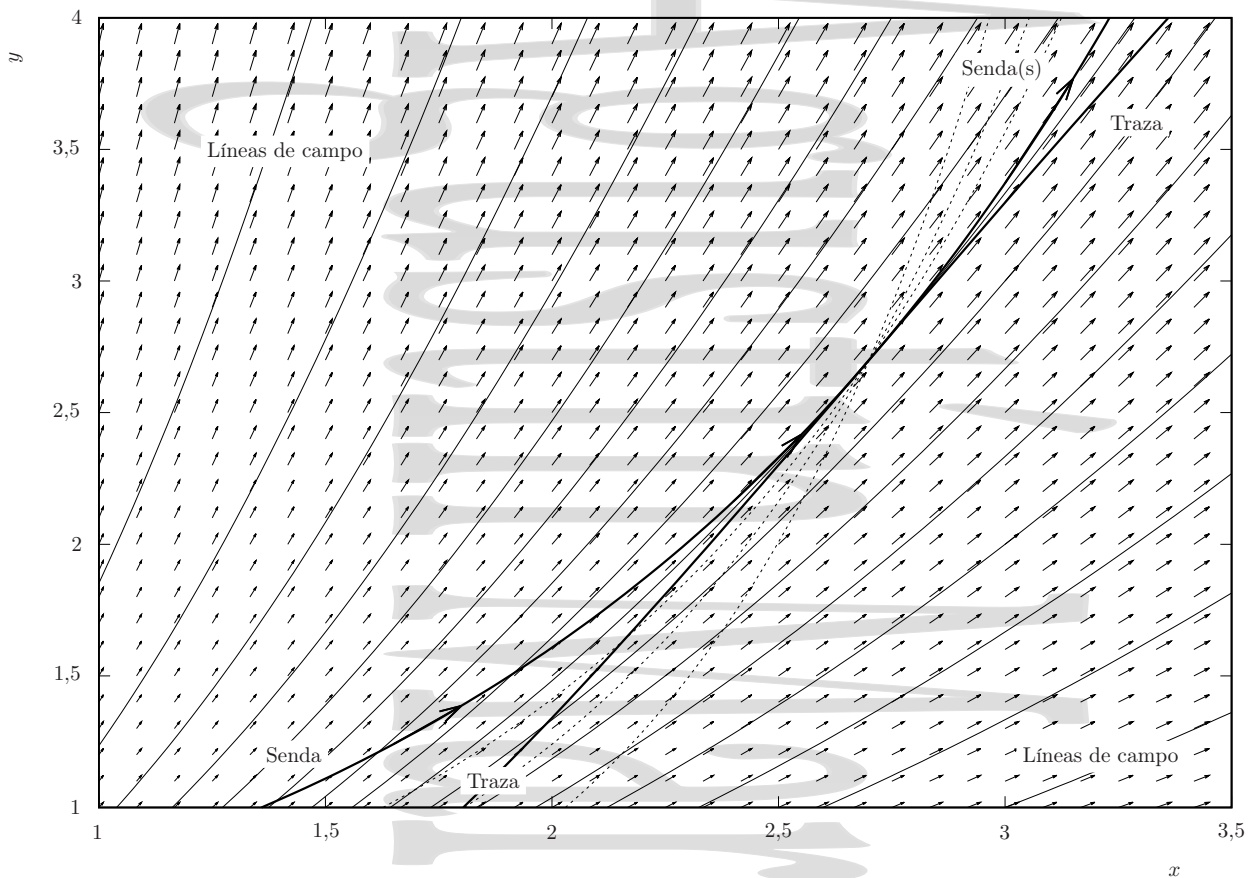


Figura 3-2: Representación espacial (x, y) de un campo de velocidades y de algunas líneas de flujo junto con varias sendas y una línea de traza. El campo de velocidades representado es el campo $(x/(1+t), y, 0)$ en el instante $t = 1$ s. La senda representada en trazo más grueso corresponde a la seguida por un elemento del fluido que en $t = 1$ s pasa por el punto $(2, 7; 2, 7)$ y la traza al lugar geométrico de los elementos del fluido que en instantes sucesivos pasan por dicho punto. Junto a la senda anterior se muestran las sendas de las partículas que pasarán por el citado punto en los instantes $t = 1,5$ s, $t = 2$ s y $t = 3$ s, representadas con líneas finas de trazos.

Tubo de flujo.

Un *tubo de flujo* o de corriente está formado por un haz de líneas de flujo. Como las líneas de flujo son tangentes al vector velocidad en cada punto, las líneas de flujo no atraviesan las paredes del tubo de flujo. Esto es así porque las paredes están a su vez formadas por líneas de flujo y si las atravesaran dos líneas de flujo se cortarían, estando la velocidad indeterminada en el punto de corte. Por tanto, a pesar de estar limitado por la superficie ficticia que envuelve el haz de líneas de flujo, éste se comporta a todos los efectos como una superficie impermeable a través de la cual no hay flujo.

3.2. Ecuación de continuidad.

3.2.1. Forma integral.

Consideremos un tubo de corriente estrecho, de forma que se pueda considerar uniforme la velocidad en cualquier sección del tubo perpendicular al flujo. En el interior del tubo la velocidad del flujo es paralela a la línea de corriente en cada punto, pudiendo ser estas velocidades distintas en cada punto.

Sea v_1 la velocidad de la partícula en el punto 1, y v_2 la velocidad de la partícula en el punto 2, con S_1 y S_2 las secciones transversales de los tubos, perpendiculares a las líneas de corriente. Si el tubo es estrecho v_1 y v_2 pueden considerarse uniformes en S_1 y S_2 respectivamente.

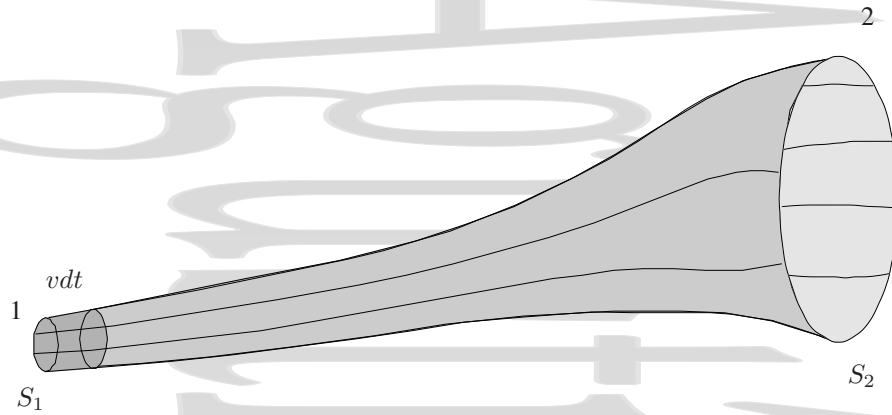


Figura 3-3: Tubo de corriente utilizado para la obtención de la ecuación de continuidad en forma integral.

En un intervalo de tiempo dt , un elemento del fluido recorrerá una distancia $v dt$, por lo que en el tiempo dt pasará por S_1 la masa de fluido

$$dm_1 = \rho_1 S_1 v_1 dt$$

donde ρ_1 es la densidad del fluido al pasar por la sección 1. El flujo de masa o *caudal másico* se define como la masa que atraviesa una sección en la unidad de tiempo, y viene dado por

$$Q_m = \frac{dm_1}{dt} = \rho_1 S_1 v_1, \quad (3-2)$$

donde implícitamente se considera que en ese intervalo infinitesimal de tiempo ni S ni v varían apreciablemente en el recorrido $v dt$ del fluido. El caudal másico a través de la sección S_1 es $\rho_1 S_1 v_1$ y a través de la sección S_2 es $\rho_2 S_2 v_2$. Como las partículas del flujo no pueden atravesar las paredes del tubo de flujo debe cumplirse que, si el régimen es permanente (o estacionario) y no hay fuentes ni sumideros de partículas, ambos caudales másicos han de ser iguales

$$Q_m = \rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad Q_m = \rho S v = cte$$

y análogamente para cualquier otra sección S perpendicular al tubo de flujo, por lo que esta ley de conservación de la masa o *ecuación de continuidad* se puede escribir simplemente como

$$\rho S v = cte \quad (3-3)$$

a través de cualquier sección del tubo de flujo perpendicular al mismo en régimen estacionario.

Para el caso particular de flujo incompresible ρ no depende del punto y esta ecuación de continuidad puede escribirse como

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad Q = S v = cte \quad (3-4)$$

donde Q es el *caudal* o volumen que atraviesa la sección en la unidad de tiempo.

Por ejemplo, en una canalización por la que circula un fluido incompresible, se tiene la sencilla relación $S_1 v_1 = S_2 v_2$, que da, para la relación entre velocidades

$$v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1 \quad (3-5)$$

En todo el cálculo anterior hemos considerado implícitamente que la velocidad v es uniforme en cada sección. Esto no es cierto en el caso general, pero la ecuación de continuidad sigue siendo válida en las mismas condiciones si la densidad es uniforme en la sección y en vez de la velocidad se utiliza la velocidad promedio en la sección,

$$\bar{v} = \frac{1}{S} \int_S v dS = \frac{Q}{S} \quad (3-6)$$

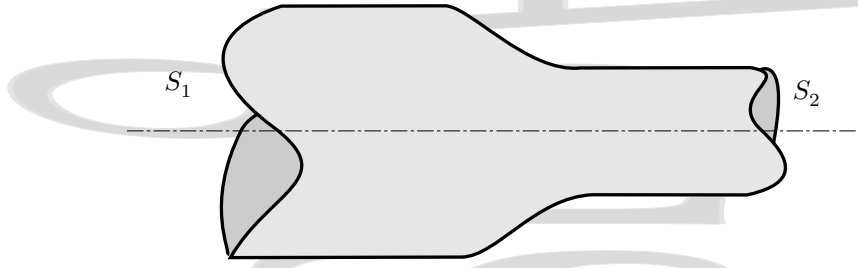


Figura 3-4

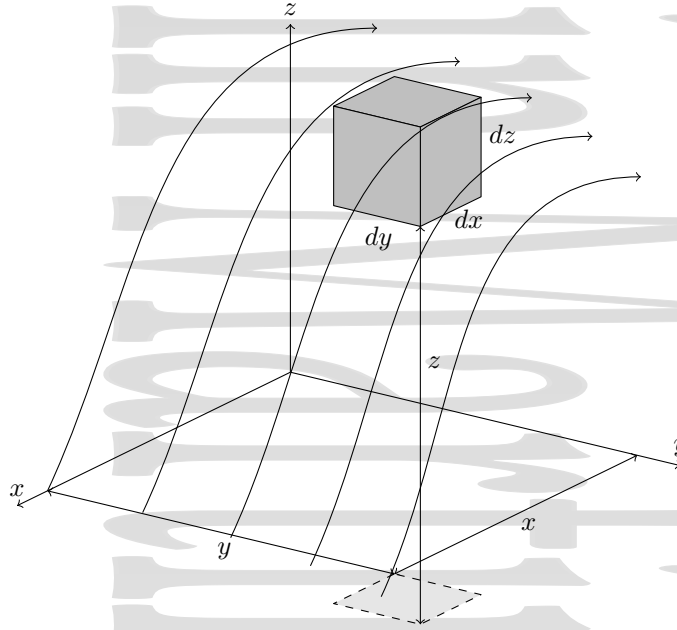


Figura 3-5: Obtención de la ecuación de continuidad en forma diferencial. Para ello analizamos el flujo neto a través de un elemento de volumen prismático e infinitesimal, colocado en un punto fijo del espacio.

3.2.2. Forma diferencial.

Estudiaremos la conservación de la masa en un elemento de volumen imaginario con forma de prisma infinitesimal de aristas dx , dy y dz y que se encuentra fijo en el espacio. El caudal másico que atraviesa la cara perpendicular al eje y de la izquierda es

$$dQ_{m_y} = \rho v_y dS_y = \rho v_y dx dz$$

mientras que el caudal másico que atraviesa la cara perpendicular al eje y de la derecha (a $y + dy$) es

$$dQ_{m_{y+dy}} = \rho v_y dS_y + \frac{\partial}{\partial y} [\rho v_y dS_y] dy = [\rho v_y + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) dy] dx dz$$

De este modo, el caudal másico neto a través de las caras perpendiculares al eje y es[†]

$$Q_{m_y}^{\text{neto}} = Q_{m_y} - Q_{m_{y+dy}} = -\frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) dx dy dz \quad (3-7a)$$

Una expresión similar se obtiene para los caudales másicos netos a través de las caras perpendiculares al eje x ,

$$Q_{m_x}^{\text{neto}} = Q_{m_x} - Q_{m_{x+dx}} = -\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) dx dy dz, \quad (3-7b)$$

[†] Este caudal es positivo si hay entrada de materia en el elemento de volumen.

y otra para los caudales máscicos netos a través de las caras perpendiculares al eje z ,

$$Q_{m_z}^{\text{neto}} = Q_{m_z} - Q_{m_{z+dz}} = -\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) dx dy dz. \quad (3-7c)$$

Si tenemos en cuenta que la masa total contenida en el prisma es $dm = \rho dV = \rho dx dy dz$, el caudal máscico total también debe ser

$$dQ_{\text{total}}^{\text{neto}} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho dV)$$

que representa la velocidad con que varía la masa en el elemento de volumen fijo en el espacio[†] en el punto considerado. Este caudal máscico debe ser a su vez la suma de los caudales máscicos a través de las caras perpendiculares a cada una de las direcciones x , y y z .

$$dQ_{\text{total}}^{\text{neto}} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho dV) = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = \left[-\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) \right] dx dy dz. \quad (3-8)$$

La parte entre corchetes no es más que menos la divergencia de $\rho \vec{v}$ por lo que la expresión anterior se puede escribir como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla(\rho \vec{v}) \quad (3-9)$$

o

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (3-10)$$

que es la expresión de la ecuación de continuidad en forma diferencial. Para el caso particular de un fluido incompresible, la densidad ρ no depende de la posición ni del tiempo y la ecuación de continuidad queda como

$$\vec{\nabla} \vec{v} = 0. \quad (3-11)$$

En régimen estacionario, la densidad en un punto no cambia con el tiempo, por lo que $\partial \rho / \partial t = 0$ y la ecuación de continuidad queda $\vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0$.

Si el caudal máscico Q_m es $\rho v S$, podemos definir una *densidad de flujo máscico* \vec{q}_m en la forma

$$\vec{q}_m = \frac{dm}{dS_{\perp} dt} \vec{u}_{\text{flujo}} = \rho \vec{v} \quad (3-12)$$

como la masa de fluido que atraviesa por unidad de superficie y de tiempo una superficie elemental perpendicular al flujo. El caudal máscico a través de una superficie queda, en función de esta densidad de flujo máscico, como

$$Q_m = \int_S \vec{q}_m d\vec{S} = \int_S \rho \vec{v} d\vec{S}. \quad (3-13)$$

Podríamos haber obtenido la ecuación de continuidad (3-10) a partir de la *ley de Gauss* aplicada al campo vectorial densidad de flujo máscico,

$$\oint_S \vec{q}_m d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \vec{q}_m dV$$

pero en un volumen cerrado infinitesimal y en la superficie cerrada que le rodea,

$$dQ_m^{\text{saliente}} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \vec{\nabla} \vec{q}_m dV = \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) dV$$

donde el signo negativo aparece porque a un flujo máscico neto saliente le corresponde una disminución de la densidad.

[†] Nótese que estamos estudiando un elemento del espacio fijo en el mismo y por ello aparecen derivadas parciales. Véase la discusión sobre la velocidad en torno a la ecuación (3-27).

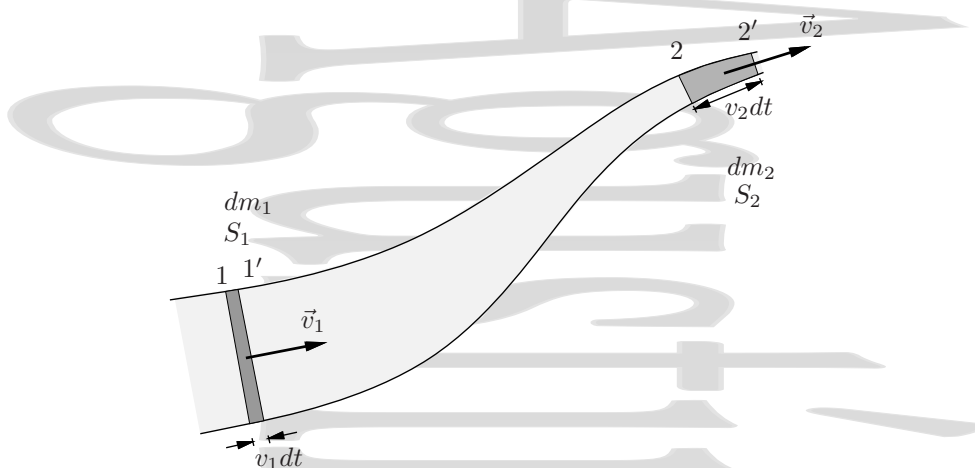


Figura 3-6: Variación de la cantidad de movimiento. En régimen permanente, la cantidad de movimiento del fluido entre 1' y 2 no cambia, por lo que la variación de la cantidad de movimiento del fluido que se encuentra originalmente entre 1 y 2 en un intervalo de tiempo dt de su movimiento sólo está relacionada con las cantidades de movimiento de las partes 1 – 1' y 2 – 2'.

3.3. Fuerza y aceleración en un elemento de fluido.

3.3.1. Fuerza neta sobre un elemento de un tubo de flujo. Variación de la cantidad de movimiento.

Calculemos la fuerza total que actúa sobre un elemento del fluido que circula por un tubo de flujo estrecho en régimen estacionario. Para ello, calcularemos la variación de la *cantidad de movimiento* o *momento lineal* de dicho elemento por unidad de tiempo, lo que nos dará la fuerza neta que actúa sobre el mismo.

Consideremos ahora el elemento de fluido que se muestra en la figura 3-6 y que inicialmente se encuentra entre las secciones 1 y 2. Un intervalo de tiempo dt después, el fluido habrá avanzado hasta las secciones 1' y 2'. La cantidad de movimiento[†] inicial de dicho fluido será, de forma general,

$$(m\vec{v}) = (m\vec{v})_{\text{inicial}} = (m\vec{v})_{1-2} = \int_{1-2} \vec{v} dm$$

La cantidad de movimiento inicial del elemento también se puede expresar como la suma de las cantidades de movimiento de los subelementos 1 – 1' y 1' – 2,

$$(m\vec{v})_{\text{inicial}} = dm_1 \vec{v}_1 + (m\vec{v})_{1'-2}$$

mientras que la cantidad de movimiento del elemento pasado un intervalo de tiempo dt será la suma de las cantidades de movimiento de los subelementos 1' – 2 y 2 – 2',

$$(m\vec{v})_{\text{final}} = (m\vec{v})_{1'-2} + dm_2 \vec{v}_2,$$

siendo la cantidad de movimiento de la parte 1' – 2 la misma en ambos casos al ser el régimen permanente. La variación de la cantidad de movimiento en dicho intervalo es entonces

$$d(m\vec{v}) = (m\vec{v})_{\text{final}} - (m\vec{v})_{\text{inicial}} = dm_2 \vec{v}_2 - dm_1 \vec{v}_1.$$

La ecuación de continuidad (3-3) nos dice que las masas dm_1 y dm_2 deben ser iguales en régimen permanente, por lo que la variación de cantidad de movimiento del fluido considerado por unidad de tiempo puede escribirse como

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}_{\text{tot}} = \frac{dm}{dt}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = Q_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \quad (3-14)$$

donde Q_m es el caudal másico (3-2), y esta variación de cantidad de movimiento del elemento de flujo por unidad de tiempo debe ser igual a la fuerza neta que actúa sobre dicho elemento.

[†]Aunque se suele utilizar la notación \vec{p} para la cantidad de movimiento o momento lineal de un cuerpo en movimiento, aquí utilizaremos la notación $(m\vec{v})$ para la misma con el fin de evitar confusiones con la presión p .

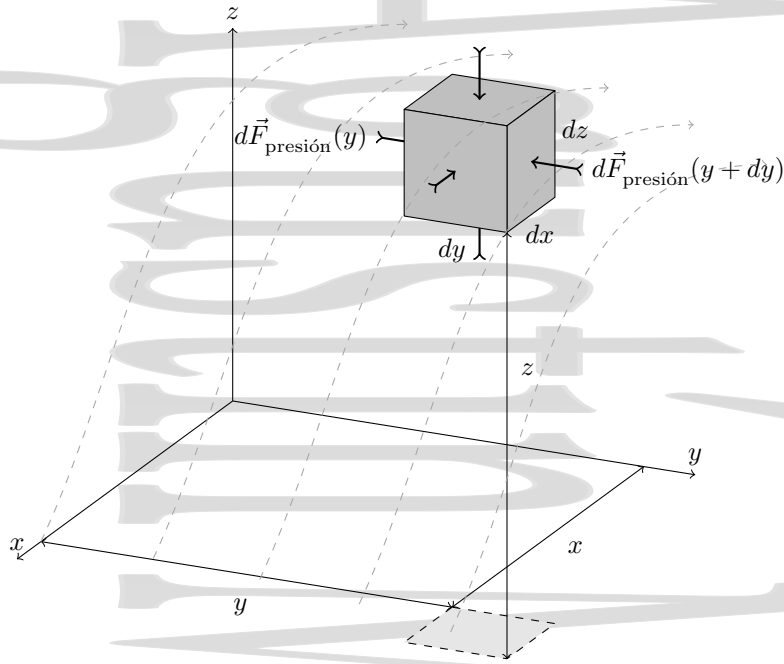


Figura 3–7: Volumen de control utilizado para la obtención de la ecuación de Euler. Este volumen de control contiene una cierta cantidad de fluido que se mueve bajo la acción de una serie de fuerzas. En la figura se muestran únicamente las fuerzas de presión en la dirección y .

3.3.2. Ecuaciones de movimiento microscópicas de un fluido perfecto. Aceleración. Ecuación de Euler.

Seguimos considerando el caso de un fluido perfecto (no viscoso) ahora de forma exclusiva. Para resolver el problema del movimiento de un fluido perfecto hay que escribir las ecuaciones de movimiento que relacionan las velocidades con las fuerzas que actúan en el fluido.

Recordemos que, para un fluido perfecto, las fuerzas en el seno del fluido en movimiento son siempre perpendiculares a la superficie, son las fuerzas de presión. El fluido que se encuentra del lado de la superficie a donde apunta \vec{n} ejerce una fuerza $\vec{F} = -p dS \vec{n}$ sobre la superficie dS .

Consideremos el elemento de volumen diferencial[†] de la figura 3–7, de dimensiones $dx dy dz$ y caras perpendiculares a los ejes coordenados. En la dirección y actúa, sobre la cara que se encuentra a una distancia y del origen, una fuerza

$$dF(y) = p(y) dx dz \quad (3-15)$$

mientras que sobre la cara que se encuentra a una coordenada $y + dy$ actúa una fuerza

$$dF(y + dy) = -p(y + dy) dx dz = -\left[p(y) + \frac{\partial p}{\partial y} dy\right] dx dz. \quad (3-16)$$

La componente y de la fuerza de presión neta será la suma de las dos fuerzas anteriores,

$$dF_y = -p(y) dx dz - \frac{\partial p}{\partial y} dy dx dz + p(y) dx dz = -\frac{\partial p}{\partial y} dy dx dz \quad (3-17a)$$

obteniéndose de la misma manera las expresiones para las componentes netas de la fuerza en las direcciones x y z ,

$$dF_x = -\frac{\partial p}{\partial x} dy dx dz \quad (3-17b)$$

$$dF_z = -\frac{\partial p}{\partial z} dy dx dz \quad (3-17c)$$

[†] Ahora, este elemento de volumen es un elemento de volumen del fluido que se desplaza con el tiempo y por tanto debemos utilizar una derivada total.

La suma vectorial de estas componentes da la fuerza de presión total que actúa sobre el elemento de volumen, de masa $\rho dV = \rho dx dy dz$,

$$d\vec{F}_{\text{presión}} = - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{u}_z \right) dx dy dz = -\vec{\nabla} p dx dy dz. \quad (3-18)$$

siendo la fuerza de presión total por unidad de volumen

$$\frac{d\vec{F}_{\text{presión}}}{dV} = -\vec{\nabla} p. \quad (3-19)$$

Si recordamos la segunda de las leyes del movimiento de Newton,

$$\vec{F} = m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

la ecuación de movimiento para los fluidos perfectos queda

$$d\vec{F}_{\text{tot}} = d\vec{F}_{\text{presión}} + \vec{f}_{\text{ext}} dm = \frac{d\vec{v}}{dt} dm = -\vec{\nabla} p dx dy dz + \vec{f}_{\text{ext}} \rho dx dy dz$$

que se puede escribir como

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{f}_{\text{ext}} \quad (3-20)$$

donde \vec{f}_{ext} representa la aceleración debida a una fuerza externa de masa que actúa sobre el elemento de fluido. Si la aceleración puede escribirse en función de un potencial Φ en la forma $\vec{f}_{\text{ext}} = -\vec{\nabla} \Phi$ la ecuación (3-20) anterior queda como

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \vec{\nabla} \Phi \quad (3-21)$$

Normalmente, esta fuerza de masa es la gravitatoria con una aceleración $\vec{f}_{\text{ext}} = \vec{g} = -g\vec{u}_z$ y un potencial $\Phi(z) = gz$ para la aceleración.

La ecuación anterior no es más que la ecuación de movimiento $\vec{F} = m\vec{a}$ en la que, junto a la contribución de la fuerza de masa a través de \vec{f}_{ext} aparece un término debido a las diferencias de presión entre dos puntos. Como $\vec{\nabla} p$ está dirigido hacia el sentido de presiones crecientes y el movimiento tiene lugar empujado por las altas presiones hacia las bajas presiones, aparece el signo negativo delante del gradiente.

3.3.3. Aplicación a un fluido en reposo.

Si además de que la única aceleración de masa a que está sometido el fluido es la aceleración gravitatoria, éste está en reposo, \vec{v} es cero en todos los puntos del fluido así que $d\vec{v}/dt = 0$ y la ecuación anterior queda

$$-\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} = 0 \quad (3-22)$$

de componentes

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g &= 0. \end{aligned}$$

De las dos primeras expresiones se obtiene directamente que la presión en este caso no puede depender ni de la variable x ni de la variable y , es decir, debe ser uniforme en un plano horizontal. Como en este caso, p no depende ni de x ni de y , $dp/dz = \partial p/\partial z$ y de la última expresión se obtiene la conocida ecuación general de la estática de fluidos, $dp = -\rho g dz$. Esta ecuación queda, para un fluido incompresible (cuya densidad ρ no varía), en la conocida forma $p(z) = p_0 - \rho g(z - z_0)$ donde p_0 es la presión a una profundidad z_0 .

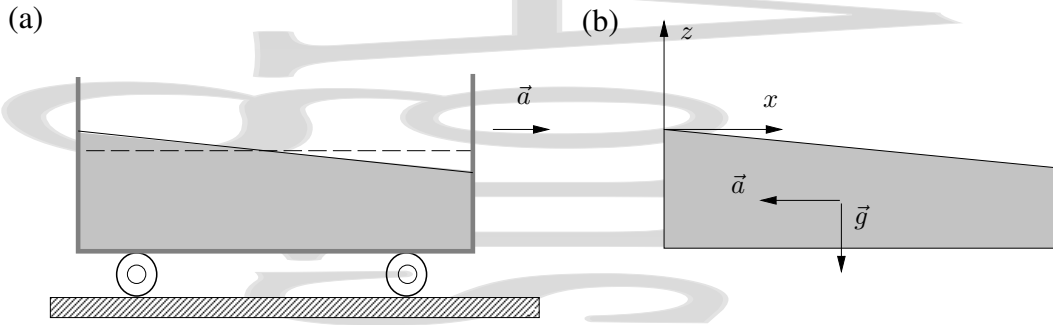


Figura 3–8: Se tiene un depósito que se mueve con una aceleración \vec{a} (a) y se quiere saber la distribución de presiones en el líquido y la ecuación de la superficie libre. Visto el problema desde el sistema de referencia no inercial que se mueve con el depósito (b), sobre éste y su contenido actúa una fuerza ficticia igual a $-\vec{a}$ además de la fuerza gravitatoria.

3.3.4. Aplicación a un fluido en reposo en un sistema de referencia no inercial.

Superficie libre en un depósito que se mueve con movimiento rectilíneo acelerado.

Estudiemos ahora el caso que se presenta en la figura 3–8, donde un depósito que contiene un líquido de densidad ρ se mueve con movimiento acelerado.

En vez de estudiar el problema desde el sistema de referencia inercial lo haremos desde un sistema de referencia que se mueve con el depósito. Visto desde este sistema de referencia, aparece una fuerza ficticia con aceleración $-\vec{a}$ en el sentido contrario a \vec{a} , y el sistema se encuentra en reposo. Las ecuaciones de Euler aplicadas a este problema nos dan

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = 0 = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{f}_{\text{ext}},$$

En el sistema de referencia no inercial, $\vec{f}_{\text{ext}} = -a\vec{u}_x - g\vec{u}_z$ e igualando las distintas componentes se tiene

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= a \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= g \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \end{aligned}$$

La variación infinitesimal de presión entre dos puntos muy próximos vendrá dada por

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz = -\rho a dx - \rho g dz,$$

que, tomando el origen de coordenadas como se indica en la figura da, al integrar,

$$p(x, z) = -\rho ax - \rho gz + p_0 \quad (3-23)$$

donde p_0 es la presión en el origen de coordenadas, en este caso la presión atmosférica. Para un valor de x dado, según aumenta la profundidad (z cada vez más negativo), la presión aumenta linealmente con la profundidad, mientras que para un z dado, como la superficie libre no es horizontal en este sistema de referencia, la presión disminuye según aumenta x .

La *superficie libre* será el lugar geométrico de los puntos que se encuentran a la presión atmosférica, es decir, aquéllos para los que al ser $p = p_0$ se cumple

$$p - p_0 = 0 = -\rho ax - \rho gz$$

lo que da como ecuación de la superficie libre

$$z(x) = -\frac{a}{g}x, \quad (3-24)$$

que es un plano inclinado un ángulo $\arctan a/g$.

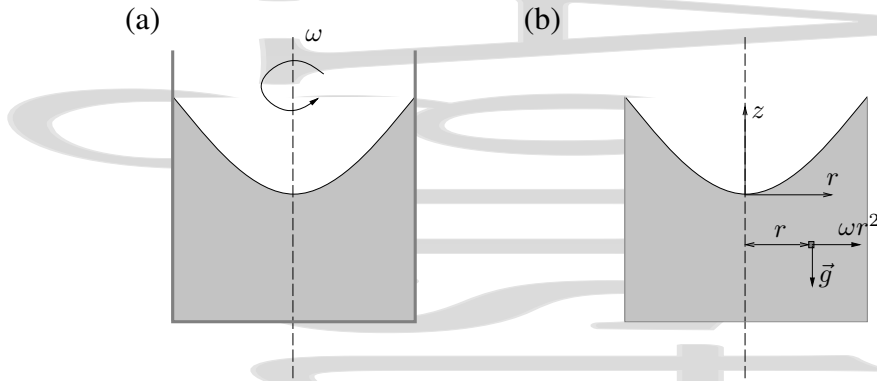


Figura 3-9: Superficie libre en un depósito circular que gira sobre su eje. En un sistema de referencia no inercial que gira con el depósito el líquido estará en reposo sometido a la fuerza gravitatoria y a la fuerza centrífuga (que es una fuerza ficticia).

Superficie libre en un depósito circular que gira sobre su eje.

Estudiaremos ahora otro caso de sistema acelerado, pero en este caso con aceleración angular. Consideremos un depósito cilíndrico colocado en posición vertical que gira alrededor de su eje con una velocidad angular ω .

En el sistema de referencia del cilindro que rota aparece una fuerza ficticia de masa, la fuerza centrífuga, como consecuencia de que este sistema de referencia no es un sistema de referencia inercial. Así, la aceleración total debida a las fuerzas de masa en el sistema de referencia no inercial es $\vec{f}_{\text{ext}} = \omega^2 r \vec{u}_r - g \vec{u}_z$ y las distintas componentes de las ecuaciones de Euler (en coordenadas cilíndricas) son:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \omega^2 r &= 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 r \\ -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g &= 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \end{aligned}$$

Una variación infinitesimal de p en el entorno de un punto se representaría por

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho \omega^2 r dr - \rho g dz$$

que, integrando en el sistema de ejes de la figura, da

$$p(r, z) = p_0 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \rho g z \quad (3-25)$$

donde p_0 es la presión en el origen de coordenadas, en este caso la atmosférica. Para un z dado la presión aumenta cuadráticamente con r , ya que cada vez hay más fluido encima del punto, mientras que para un r dado, la presión aumenta linealmente con la profundidad.

La superficie libre será el lugar geométrico de los puntos que se encuentren a la presión p_0 , en este caso la atmosférica. Para estos puntos se tiene

$$p - p_0 = 0 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \rho g z$$

lo que da, para la ecuación de la superficie libre,

$$z(r) = \frac{\omega^2 r^2}{2g} \quad (3-26)$$

que es un paraboloide (y en el plano de la figura se ve como una parábola).

3.3.5. Vorticidad.

Volvamos sobre la ecuación de Euler (3-20) y discutamos sobre la aceleración $d\vec{v}/dt$. En principio podría pensarse que la expresión para la aceleración es de la sencilla forma $\partial\vec{v}/\partial t$, pero esto no es así. $\partial\vec{v}/\partial t$ representa la rapidez con que la velocidad cambia en un punto fijo del espacio, pero lo que necesitamos es la variación de la velocidad de un elemento particular del fluido. Si la trayectoria tiene una curvatura o el fluido se acelera de un punto a otro, aparece una componente de aceleración del elemento aunque la velocidad en un punto se mantenga constante. Así, la variación de velocidad de un punto a otro infinitamente próximo viene dada por

$$d\vec{v} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}dt + \frac{\partial\vec{v}}{\partial x}dx + \frac{\partial\vec{v}}{\partial y}dy + \frac{\partial\vec{v}}{\partial z}dz$$

de forma que la aceleración $d\vec{v}/dt$ se escribe como

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial x}v_x + \frac{\partial\vec{v}}{\partial y}v_y + \frac{\partial\vec{v}}{\partial z}v_z,$$

que puede escribirse, representando $\vec{\nabla}$ como un vector, en la forma

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}. \quad (3-27)$$

Debe observarse que es posible una aceleración aunque $\partial\vec{v}/\partial t$ sea 0, es decir, aunque la velocidad del fluido en un punto dado no esté variando. Por ejemplo, un elemento de agua que fluye en círculo a una velocidad constante está acelerándose sometido a una aceleración centrípeta aunque la velocidad en un punto dado no cambie.

Se denomina *aceleración convectiva* o *aceleración de transporte* al primero de los sumandos que aparecen en la ecuación (3-27) y corresponde al ritmo de cambio de la velocidad debido al cambio en la posición en que se mide. El segundo sumando es la denominada *aceleración local* y corresponde al ritmo de cambio de la velocidad en un punto concreto del flujo.

Utilizaremos la siguiente identidad del análisis vectorial,

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{v})$$

y definiremos un nuevo campo vectorial $\vec{\Omega}$ como el rotacional de \vec{v} ,

$$\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}, \quad (3-28)$$

lo que nos permite escribir la identidad vectorial anterior como

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}v^2.$$

Si la fuerza $m\vec{f}_{\text{ext}}$ admite un potencial, la aceleración \vec{f}_{ext} también admitirá uno. Así, la aceleración \vec{f}_{ext} puede escribirse en función de su potencial Φ como $\vec{f}_{\text{ext}} = -\vec{\nabla}\Phi$. Si la única fuerza de masa que actúa es la gravitatoria, el potencial es simplemente $\Phi = gz$. En función del potencial, la ecuación de movimiento (3-20) queda en la forma

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}v^2 = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p - \vec{\nabla}\Phi \quad (3-29)$$

Se denomina vorticidad al campo vectorial $\vec{\Omega}$. Si la vorticidad es cero en cualquier punto del flujo (es decir, si $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$) se dice que el flujo es *irrotacional*.

Retomemos ahora un concepto habitual en electromagnetismo, la circulación de un campo vectorial a lo largo de una trayectoria cerrada. Ésta se define como la integral de línea, a lo largo del camino cerrado dado, del campo vectorial correspondiente multiplicado por el elemento de longitud a lo largo de ese camino. En particular, la circulación del vector velocidad \vec{v} a lo largo de cualquier camino cerrado en un fluido se define como

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l}.$$

Utilizando el teorema de Stokes para un camino cerrado infinitesimal esta circulación por unidad de área es igual al módulo de $\vec{\nabla} \times \vec{v}$. Así, la vorticidad $\vec{\Omega}$ es la circulación del vector velocidad alrededor de un área unidad (perpendicular a la dirección de $\vec{\Omega}$). También puede deducirse que un elemento de fluido en un punto del líquido rotará con una velocidad angular $\Omega/2$.

Particularicemos ahora al caso de un fluido incompresible en el que nuestro interés se centra en el campo de velocidades ya que en estas condiciones es posible eliminar la presión de las ecuaciones anteriores. Para ello se toma el rotacional de los dos miembros de la ecuación (3-29). Como el rotacional de cualquier gradiente es cero y en un líquido la densidad es constante, se tiene, utilizando la ecuación de continuidad

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (3-11)$$

para un fluido incompresible,

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{\Omega} \times \vec{v}) = 0, \quad (3-30)$$

ecuación que, junto con las ecuaciones

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (3-11)$$

y

$$\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v} \quad (3-28)$$

determina completamente el campo de velocidades \vec{v} . Así, si conocemos la vorticidad $\vec{\Omega}$ en un determinado instante se tiene el rotacional del vector velocidad y como además conocemos que la divergencia es cero, dada esa situación física es posible determinar la velocidad \vec{v} en cualquier instante y lugar. Conociendo \vec{v} la ecuación (3-30) permite obtener la vorticidad $\vec{\Omega}$ en un instante de tiempo posterior. Utilizando de nuevo (3-28) se tiene la nueva velocidad y vuelta a empezar. Hay que notar que siguiendo este procedimiento se obtiene información únicamente sobre el campo de velocidades y se ha perdido por completo la información sobre la presión.

Veamos un caso particular de lo anterior. Si $\vec{\Omega}$ es cero en todo el fluido en un determinado instante de tiempo, $\partial \vec{\Omega} / \partial t$ también lo será, según la ecuación (3-30), y por tanto $\vec{\Omega}$ será cero en cualquier instante de tiempo inmediatamente posterior. Así, el flujo es permanentemente irrotacional. Si la rotación del flujo es inicialmente cero, siempre será irrotacional y las ecuaciones a resolver serán

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$$

similares a las ecuaciones de los campos electrostático y magnetostático.

3.4. Conservación de la energía en un fluido perfecto. Ecuación de Bernoulli.

Hemos obtenido la ecuación de continuidad para flujo estacionario y hemos demostrado que, para un flujo incompresible vS es una constante. Si además el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas es despreciable, la energía mecánica se debe conservar.

Estudiaremos esto de dos formas, en primer lugar utilizando la ecuación de movimiento del fluido perfecto escrita en función de la vorticidad, (3-29) y en segundo lugar mediante el análisis de las variaciones de energía en el fluido contenido dentro de un tubo de flujo estrecho y del trabajo mecánico realizado sobre el mismo,

3.4.1. Obtención a partir de las ecuaciones de Euler.

Consideremos la ecuación (3-29) para el caso particular de flujo estacionario en el que $\partial v / \partial t = 0$ y recordemos que en flujo estacionario, las trayectorias reales de los elementos del fluido (la senda) tienen lugar a lo largo de las líneas de flujo. Multiplicando escalarmente la ecuación (3-29) por \vec{v} el término $\vec{v}(\vec{\Omega} \times \vec{v})$ se anula y queda

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left\{ \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \Phi \right\} = 0 \quad (3-31)$$

Si consideramos un sistema de ejes coordenados que tiene uno de ellos (denominémosle x_v) dirigido a lo largo de una línea de flujo y los otros dos en direcciones perpendiculares, la única componente del gradiente que no se anula en el producto escalar es precisamente la componente en la dirección del flujo, quedando la ecuación anterior en la forma

$$v \frac{\partial}{\partial x_v} \left\{ \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \Phi \right\} = 0.$$

o

$$\frac{\partial}{\partial x_v} \left\{ \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \Phi \right\} = 0 \quad (3-32)$$

Esta ecuación nos dice que a lo largo de una línea de corriente el término entre corchetes debe ser constante,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \Phi = cte \quad \text{en una línea de flujo} \quad (3-33)$$

conociéndose a esta expresión como *ecuación de Bernoulli*. Esta ecuación es válida a lo largo de una línea de flujo para un flujo estacionario e incompresible que conserva la energía. La constante será en general distinta para distintas líneas de flujo.

Un caso particular interesante se tiene cuando el flujo es además irrotacional. En este caso la vorticidad es nula en cualquier punto del flujo y la ecuación (3-29) queda como

$$\vec{\nabla} \left\{ \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \Phi \right\} = 0.$$

de donde se deduce que en este caso particular de flujo irrotacional,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \Phi = cte \quad \text{en el tubo de flujo} \quad (3-34)$$

entre puntos en cualquiera de las líneas de flujo del fluido, es decir entre puntos del tubo de flujo. Si como es habitual la única fuerza de masa que actúa sobre el fluido es la atracción gravitatoria, $\Phi = gz$ y la ecuación de Bernoulli queda

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + gz = cte \quad (3-35)$$

que también se escribe como

$$p + \rho gz + \frac{1}{2} \rho v^2 = cte, \quad (3-36)$$

aunque en Hidráulica esta ecuación se suele escribir en la forma

$$\frac{p}{\rho g} + z + \frac{v^2}{2g} = cte. \quad (3-37)$$

En esta última forma cada uno de los elementos de la ecuación de Bernoulli tiene dimensiones de longitud. Físicamente esto representa energías por unidad de peso del fluido. Además, cada uno de los sumandos de (3-37) recibe un nombre especial,

$\frac{p}{\rho g}$ es la *altura de presión*. Representa la energía por unidad de peso debida a las fuerzas de presión.

z es la *altura geométrica* y representa la energía potencial gravitatoria del fluido por unidad de peso.

$\frac{v^2}{2g}$ es la *altura de velocidad* o altura cinética y representa la energía cinética por unidad de peso del fluido en un punto.

La suma de las alturas de presión y geométrica $\frac{p}{\rho g} + z$ con la presión expresada en presiones manométricas recibe el nombre de *altura piezométrica* y corresponde a la altura que alcanzaría el líquido en un tubo vertical abierto a la atmósfera (piezómetro) colocado en ese lugar del flujo (véanse las figuras 3-13 y 3-16). Asimismo se denomina *altura total*, *altura de carga* o *carga hidráulica* a la suma de los tres elementos de la ecuación de Bernoulli, correspondiendo

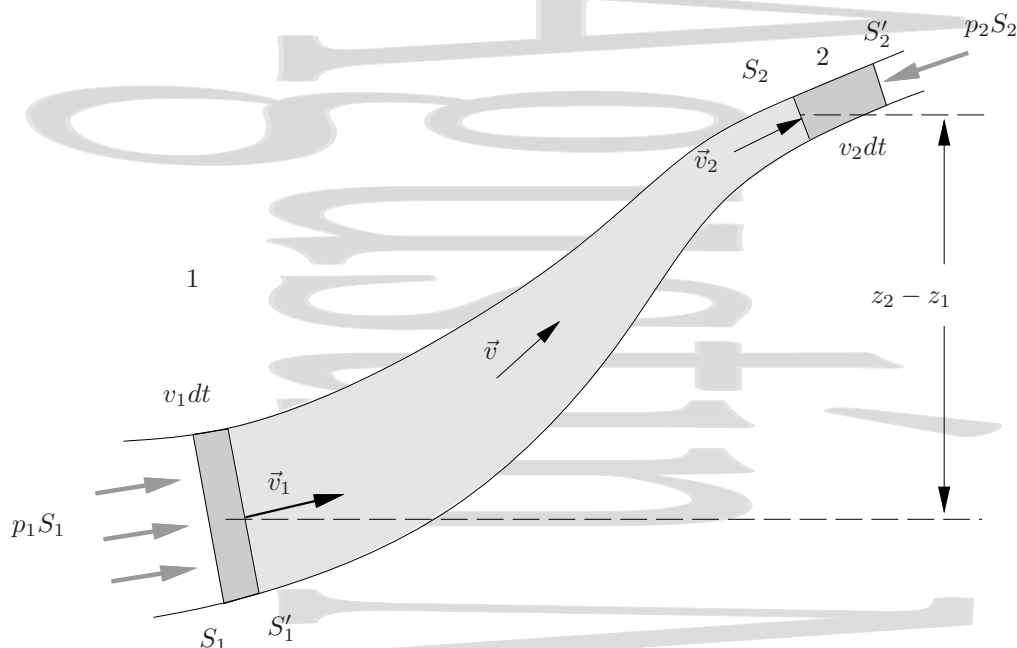


Figura 3-10: Obtención de la ecuación de Bernoulli para una línea de flujo. En la figura se representa un tubo de flujo estrecho de forma que la velocidad pueda considerarse uniforme en cada sección.

a la energía mecánica total por unidad de peso del fluido, que incluye tanto la componente de energía cinética como componentes de energía potencial en el campo gravitatorio y en el campo de presiones.

Nótese que las expresiones (3-36) y (3-37) se cumplen tanto si la presión se toma en presiones manométricas como si se toma en presiones absolutas. Sin embargo, como la presión atmosférica actúa en las dos partes, salvo casos muy especiales en Hidráulica en general y en particular al utilizar la ecuación de Bernoulli se trabaja con presiones manométricas, presiones respecto de la presión atmosférica, descontándose ésta en ambas partes. Es en estas condiciones de presión manométrica cuando la altura piezométrica tiene el significado físico que acabamos de darle, como altura del líquido en un piezómetro.

3.4.2. Obtención a través de la conservación de la energía.

Veamos cómo la ley de conservación de la energía relaciona la altura del fluido, el módulo de la velocidad del flujo y la presión para puntos que se encuentran a lo largo de una línea de flujo. Para ello consideraremos un tubo de flujo estrecho alrededor de la línea de flujo considerada, como se muestra en la figura 3-10. De este modo la velocidad en las secciones transversales del tubo de flujo puede ser considerada uniforme.

En primer lugar hallaremos el trabajo realizado en un intervalo de tiempo dt sobre el fluido que está en la región limitada por las secciones S_1 y S_2 y el tubo de corriente. El fluido que se encuentra a la izquierda de la superficie S_1 ejerce sobre ésta una fuerza $p_1 S_1$, perpendicular a la superficie. En el intervalo de tiempo dt esta fuerza realizará un trabajo

$$F_1 dx_1 = p_1 S_1 v_1 dt$$

sobre el volumen de fluido considerado, aumentando en esa cantidad la energía del mismo. Análogamente, el fluido que se encuentra a la derecha de la superficie S_2 ejerce sobre ésta una fuerza $p_2 S_2$, por lo que el trabajo realizado por esta fuerza sobre el elemento de volumen considerado es

$$F_2 dx_2 = -p_2 S_2 v_2 dt,$$

de modo que el trabajo total realizado sobre el fluido es

$$\delta W = p_1 S_1 v_1 dt - p_2 S_2 v_2 dt, \quad (3-38)$$

expresión válida para cualquier tipo de fluido. Para el caso concreto de un fluido incompresible, se cumple $v_1 S_1 = v_2 S_2$, por lo que la expresión anterior puede escribirse como

$$\delta W = (p_1 - p_2)v_1 S_1 dt = (p_1 - p_2)v_2 S_2 dt$$

o simplemente como

$$\delta W = (p_1 - p_2) dV \quad (3-39)$$

donde dV es el volumen del elemento infinitesimal.

Este trabajo realizado sobre el fluido debe traducirse en un aumento de su energía total en el campo gravitatorio. Así, hay un cambio de la energía cinética en la región $S_1 - S'_1$ que se acaba de abandonar y en la región $S_2 - S'_2$ que se acaba de ocupar, y también un cambio en la energía potencial gravitatoria. En el volumen dV , que al ser el fluido incompresible es el mismo en las dos regiones, la masa es ρdV , la energía potencial gravitatoria es $gz dm$ (con z la altura del punto) y la energía cinética $\frac{1}{2}v^2 dm$. El cambio en la energía total en el campo gravitatorio queda entonces

$$dU = \left[gz_2 dm + \frac{1}{2}v_2^2 dm \right] - \left[gz_1 dm + \frac{1}{2}v_1^2 dm \right] \quad (3-40)$$

y debe ser igual al trabajo realizado sobre el fluido, $dU = \delta W$, ya que en un fluido perfecto no se produce ni disipación de energía ni otro tipo de intercambio de calor.

$$dU = \left[gz_2 dm + \frac{1}{2}v_2^2 dm \right] - \left[gz_1 dm + \frac{1}{2}v_1^2 dm \right] = \delta W = (p_1 - p_2)dV = (p_1 - p_2)\frac{dm}{\rho} \quad (3-41)$$

que, al simplificar queda

$$p_1 - p_2 = \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \rho g z_1 - \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

que es la misma *ecuación de Bernoulli* que vimos, bien expresada en presiones

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = \text{cte.} \quad (3-36)$$

o bien expresada en alturas, que es la forma más habitual en Hidráulica

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} = \text{cte,} \quad (3-37)$$

teniendo cada elemento la denominación y el significado físico que vimos en la sección 3.4.1 anterior. Como también se vio en el apartado anterior, en el caso más general la ecuación de Bernoulli es válida a lo largo de una línea de flujo para un flujo que conserva la energía, estacionario e incompresible. Recordemos que cuando el flujo es irrotacional, esta expresión es válida entre dos puntos de un mismo tubo de flujo, y no solamente entre puntos de la misma línea de flujo.

3.5. Aplicaciones de las ecuaciones anteriores a fluidos perfectos.

3.5.1. Velocidad de salida por un orificio (teorema de Torricelli).

Consideremos ahora el caso de un depósito de gran superficie libre S_1 abierto a la atmósfera (figura 3-11), que desagua a través de un pequeño orificio de sección S_2 situado a una profundidad h respecto de la superficie libre. Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_{\text{atm}} + \rho g h = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_{\text{atm}} + \rho g h$$

Como $S_1 \gg S_2$, de $v_1 S_1 = v_2 S_2$ se tiene que $v_1 \ll v_2$ y por tanto v_1^2 puede despreciarse frente a v_2^2 y la velocidad de salida por un orificio en un depósito abierto a la atmósfera queda

$$v_2 = \sqrt{2gh} \quad (3-42)$$

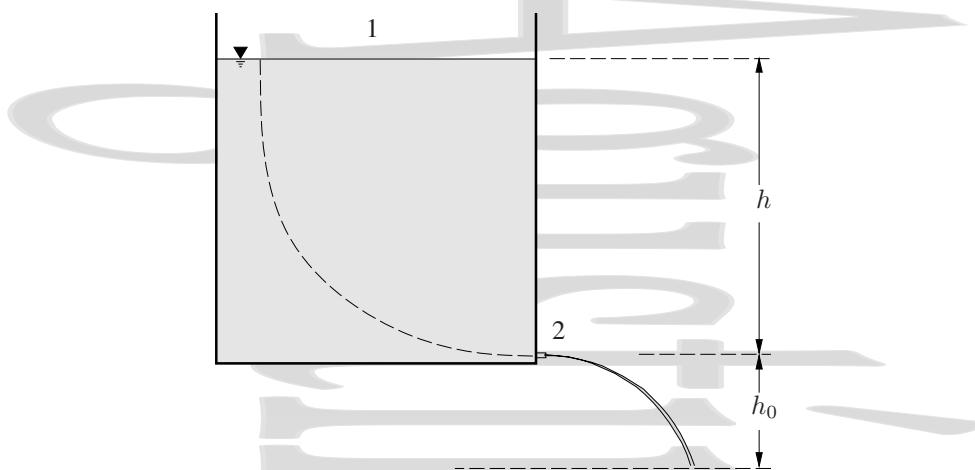


Figura 3-11: Teorema de Torricelli. Se quiere obtener la velocidad de salida por un orificio pequeño en un gran depósito abierto a la atmósfera en el que el líquido alcanza un nivel h sobre el orificio.

Obsérvese que la expresión obtenida es válida únicamente cuando el depósito está abierto a la atmósfera y no cuando el depósito está a presión o hay una capa de otro líquido encima de la del líquido que está desaguando.

Asimismo, debe observarse que tanto en este ejemplo como en el siguiente el régimen del flujo no es estrictamente permanente, la superficie libre va descendiendo lentamente y ello afecta a las velocidades y presiones en cada punto. Sin embargo, al tratarse de un proceso muy lento pueden aplicarse las expresiones (3-3), (3-14) y (3-37) con una buena aproximación. Es más como en los dos casos particulares que vemos en la sección siguiente y en ésta se tiene un líquido (de muy baja compresibilidad), las paredes del tubo de flujo son rígidas y no hay aporte/salida de fluido fuera del tubo de flujo, siempre se tendrá que la masa que atraviesa una sección (p.ej., S_1) en la unidad de tiempo es igual a la masa que atraviesa la otra sección (p.ej., S_2) en la unidad de tiempo, condición básica que utilizábamos en nuestros cálculos para obtener (3-3), (3-14) y (3-37) y que es cierta para un flujo permanente. Nótese que esto último no es válido en general, por lo que debe tomarse con cuidado.

3.5.2. Tiempo de vaciado de un gran depósito abierto a la atmósfera.

Consideremos ahora un gran depósito abierto a la atmósfera inicialmente lleno hasta una altura h_0 , con una gran superficie libre S_1 y un pequeño desagüe de sección S_2 . Una vez comienza a desaguar, en un intervalo de tiempo dt el nivel del líquido en el depósito desciende en dh .

A partir de la ecuación de continuidad para un flujo incompresible se tiene, con h disminuyendo al aumentar t

$$-S_1 \frac{dh}{dt} = S_1 v_1 = S_2 v_2 = S_2 \sqrt{2gh}$$

de forma que la variación de volumen en el intervalo de tiempo dt queda como

$$-S_1 dh = \sqrt{2gh} S_2 dt$$

Agrupando e integrando,

$$\int_{h_0}^h \frac{dh}{h^{1/2}} = -\frac{S_2 \sqrt{2g}}{S_1} \int_0^t dt = \left[2h^{1/2} \right]_{h_0}^h = -\frac{S_2 t}{S_1} \sqrt{2g}$$

de donde queda

$$t = \frac{S_1}{S_2} \sqrt{\frac{2}{g}} \left[h_0^{1/2} - h^{1/2} \right] \quad (3-43)$$

Para que el depósito se vacíe completamente (y su altura h se haga 0) se necesitaría un tiempo

$$t_{\text{vac}} = \frac{S_1}{S_2} \sqrt{\frac{2}{g}} h_0^{1/2}. \quad (3-44)$$

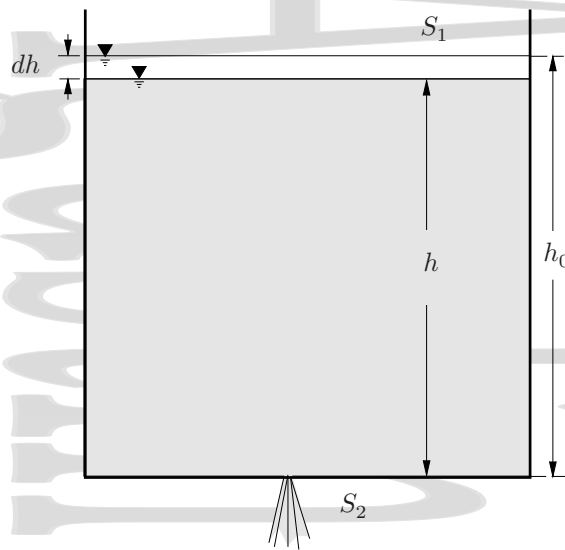


Figura 3-12: Tiempo de vaciado de un gran depósito abierto a la atmósfera.

3.5.3. Presión dinámica y presión estática. Tubo de Pitot.

El tubo de Pitot se utiliza para medir la velocidad de un fluido. Para ello se utilizan dos aberturas, A y B, perpendicular y paralela a la dirección del flujo como se muestra en la figura 3-13. Si p_C es la presión en el gas sobre el fluido (que puede regularse mediante la llave), claramente se tiene

$$\begin{aligned} p_A &= \rho g(H + \Delta h) + p_C \\ p_B &= \rho gH + p_C \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad p_A - p_B = \rho g\Delta h \quad (3-45)$$

La presión p_B en el punto B es la *presión estática* de la corriente fluida. Es la presión que se obtiene cuando el dispositivo de medida no introduce cambios en la velocidad del fluido[†].

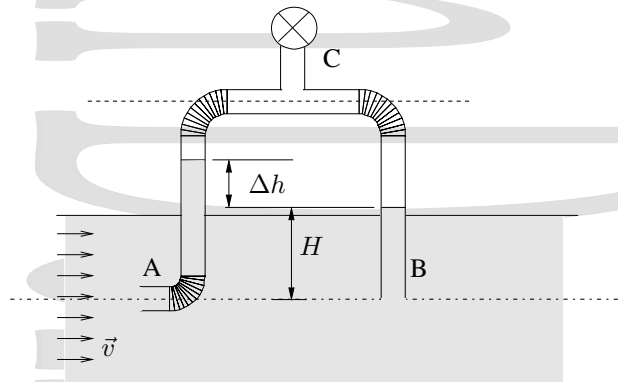


Figura 3-13: Tubo de Pitot para líquidos.

Por el contrario, en el punto A el fluido se frena contra la boca del tubo, en la que queda estancado con velocidad 0, lo que da lugar a una fuerza adicional. Así, con los dos puntos A y B a la misma altura, la presión p_A es la suma de la presión estática p_B y la *presión dinámica* dada por $\rho v^2/2$.

$$p_A + 0 + 0 = p_B + \frac{1}{2}\rho v^2 + 0$$

[†]En este caso, hay un pequeño cambio en el fluido que está por encima de la boca y rodea el tubo, pero no lo hay en el fluido que está a la altura de la boca y por debajo.

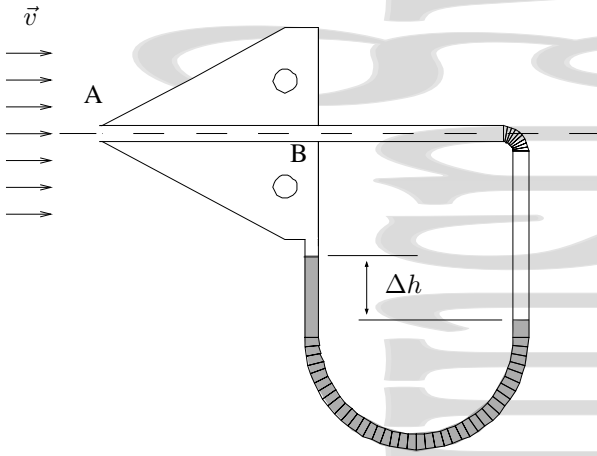


Figura 3-14: Esquema de un tubo de Pitot para gases.



Figura 3-15: Tubos de Pitot principal y de emergencia de un MIG-21 en el Museo del Ejército de Berlín. Fotografía de Rosario Van Tulpe cedida al dominio público.

(dicho en otras palabras, a la hora de calcular la altura total en A hay que tener en cuenta el aumento de altura debido al fluido que intenta entrar y no puede). Así, se tiene

$$v^2 = \frac{2(p_A - p_B)}{\rho} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho}}. \quad (3-46)$$

Esto se puede expresar en función de la diferencia de alturas h en la forma

$$v = \sqrt{2g\Delta h} \quad (3-47)$$

Los tubos de Pitot para gases tienen la forma que se muestra en la figura 3-13, y en ellos se utiliza un fluido manométrico de densidad ρ' u otro sistema mecánico. En este caso, la velocidad del fluido (de densidad ρ) toma la forma

$$v = \sqrt{\frac{2\rho'g\Delta h}{\rho}} \quad (3-48)$$

3.5.4. Efecto Venturi. Venturímetro.

El *efecto Venturi* es una consecuencia inmediata de la ecuación de continuidad y de la ecuación de Bernoulli. Consideremos dos puntos A y B a la misma altura, pero con distintas secciones S_A y S_B (véanse las figuras 3-16 y 3-17). La ecuación de Bernoulli nos da

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

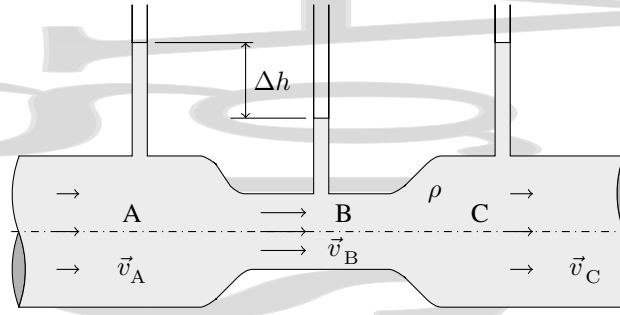
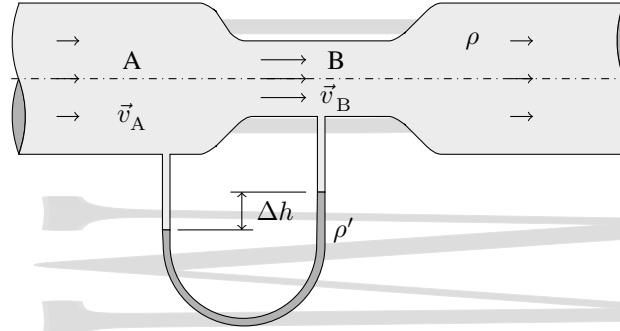
que implica, al cumplirse $v_A^2 = v_B^2 S_B^2 / S_A^2$ y ser $S_A > S_B$

$$p_A - p_B = \frac{1}{2}\rho(v_B^2 - v_A^2) = \frac{1}{2}\rho v_B^2 \left(1 - \frac{S_B^2}{S_A^2}\right) > 0. \quad (3-49)$$

Como se ve, la presión es más débil donde la velocidad es mayor, es decir, donde la sección es menor.

Una aplicación inmediata de este efecto es el denominado *venturímetro* (véanse de nuevo las figuras 3-16 y 3-17). Consiste en un calibrador colocado en una tubería para medir la velocidad de flujo de un líquido. Despejando la velocidad de la ecuación (3-49) se tiene

$$v_B^2 = \frac{2(p_A - p_B)}{\rho} \frac{S_A^2}{S_A^2 - S_B^2}$$

**Figura 3-16:** Efecto Venturi en un estrechamiento observado con piezómetros.**Figura 3-17:** Efecto Venturi en un estrechamiento observado con un manómetro de p.ej. mercurio.

que da

$$v_A^2 = \frac{S_B^2}{S_A^2} v_B^2 = \frac{S_B^2}{S_A^2} \frac{2(p_A - p_B)}{\rho} \frac{S_A^2}{S_A^2 - S_B^2} = \frac{S_B^2}{S_A^2} v_B^2 = \frac{2(p_A - p_B)}{\rho} \frac{S_B^2}{S_A^2 - S_B^2}$$

resultando finalmente, para la velocidad del flujo en el caso de la figura 3-16 en el que se mide la diferencia de presiones mediante la diferencia de altura entre dos piezómetros

$$v_A = \sqrt{\frac{2S_B^2(p_A - p_B)}{\rho(S_A^2 - S_B^2)}} = S_B \sqrt{\frac{2g\Delta h}{(S_A^2 - S_B^2)}}, \quad (3-50)$$

mientras que para el caso de la figura 3-17 en el que la diferencia de presiones se mide con un manómetro de una sustancia de distinta densidad ρ' se tiene

$$v_A = S_B \sqrt{\frac{2\rho'g\Delta h}{\rho(S_A^2 - S_B^2)}} \quad (3-51)$$

Otra aplicación de este efecto Venturi es la denominada trompa de agua, que se utiliza para hacer bajos vacíos de forma limpia. Este mismo efecto se utiliza también en pulverizadores, en los que se hace pasar el líquido por un fuerte estrechamiento de forma que su presión disminuya lo suficiente para que pase a vapor.

Asimismo, observemos que cuando se intenta separar dos papeles casi juntos soplando éstos tienden a juntarse, ya que la velocidad del aire entre los mismos es mayor que la velocidad del aire fuera, en otra manifestación del efecto Venturi.

Augustin Martin Jourdain.

Capítulo 4

Dinámica de fluidos reales.

Índice del capítulo

4.1. Introducción.	45
4.1.1. Efecto de la viscosidad en el movimiento de un fluido.	45
4.1.2. Régimen laminar y régimen turbulento.	46
4.2. Viscosidad en fluidos reales.	47
4.2.1. La condición de no deslizamiento.	47
4.2.2. Flujo turbulento y capa límite.	47
4.2.3. Fluidos newtonianos. Viscosidades dinámica y cinemática.	48
4.2.4. Factores que influyen en la viscosidad.	50
4.2.5. Fluidos no newtonianos.	51
4.3. Ecuaciones de movimiento de los fluidos reales.	53
4.3.1. Fluido perfecto o flujo no viscoso.	55
4.3.2. Fluido newtoniano. Las ecuaciones de Navier-Stokes.	56

4.1. Introducción.

En el movimiento de todo fluido aparecen una serie de fuerzas de rozamiento. Estas fuerzas de rozamiento dan lugar siempre a una disipación de energía mecánica del fluido que se mueve, resultando en una disminución de energía del mismo, igual que las fuerzas de rozamiento disipan energía de un bloque deslizante en energía interna del bloque y de la superficie sobre la que se desliza (aumentan sus temperaturas).

En el capítulo anterior vimos el concepto de fluido perfecto, una aproximación drástica al estudio del movimiento de un fluido en la que no consideramos la acción de las fuerzas viscosas de rozamiento. Esta aproximación del fluido perfecto o no viscoso se utiliza cuando el efecto de esas fuerzas de rozamiento es muy pequeño o cuando realizamos una primera aproximación al estudio del movimiento de un fluido mediante un modelo muy simplificado que posteriormente se completará.

Sin embargo, las fuerzas de rozamiento están siempre presentes en el movimiento de un fluido y normalmente es necesario tenerlas en cuenta, denominándose *fluido real* al fluido en el que se tiene en cuenta la acción dichas fuerzas.

4.1.1. Efecto de la viscosidad en el movimiento de un fluido.

Todo fluido real posee la propiedad de la *viscosidad*. La viscosidad es la causa de la resistencia que aparece en el flujo de un fluido en tuberías y canales y está relacionada con la oposición de un fluido a las deformaciones tangenciales, en las que se produce rozamiento entre distintas partes del fluido. Por ejemplo, a causa de las fuerzas viscosas de rozamiento en una tubería, las capas de fluido más próximas a la pared (más lentas) frenan a las capas más interiores (más rápidas), apareciendo una distribución de velocidades.

El efecto de estas fuerzas de rozamiento en el flujo se traduce en una disipación de energía que debe tenerse en cuenta en la ecuación de Bernoulli (3-37) en la forma siguiente, si el flujo va de 1 a 2,

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} - \Delta h_{12} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}, \quad (4-1)$$

donde Δh_{12} es la energía disipada entre 1 y 2 por unidad de peso del fluido, a la que se denomina *pérdida de carga*.

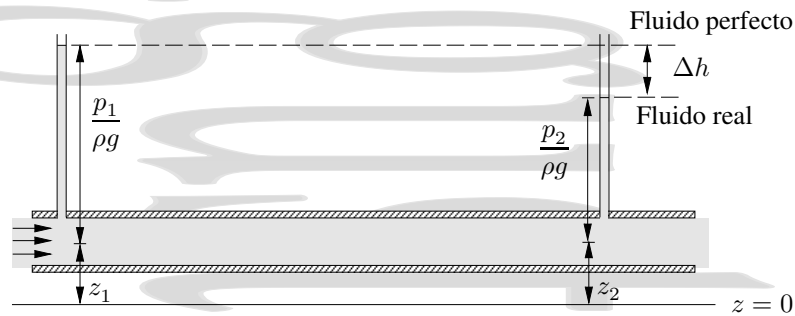


Figura 4-1: La presión disminuye a lo largo del flujo en un fluido real, al contrario de lo que ocurre en un fluido perfecto.

Como consecuencia de la disipación de energía por rozamiento, cuando un fluido viscoso circula por una tubería horizontal de sección uniforme, la presión a lo largo de una línea de flujo disminuye, al contrario de lo que ocurre en un fluido perfecto (fig. 4-1). Debe notarse que al no variar la sección de la tubería, para un fluido incompresible la velocidad del flujo en la misma no varía, al contrario que la presión.

4.1.2. Régimen laminar y régimen turbulento.

Dependiendo de la importancia relativa entre las fuerzas viscosas y las fuerzas de inercia, el régimen de movimiento de un fluido puede ser de dos tipos bien diferenciados,

Régimen laminar o de Poiseuille: El régimen del flujo es *laminar* cuando el flujo tiene un movimiento ordenado, en el que las partículas del fluido se mueven en líneas y capas paralelas, sin que se produzca mezcla de materia entre las distintas capas.

Régimen turbulento o de Venturi: El régimen de movimiento de un fluido es *turbulento* cuando el fluido presenta un movimiento desordenado con mezcla intensiva entre las distintas capas.

Para distinguir conceptualmente ambos regímenes es conveniente recordar la forma en que se observa experimentalmente el paso de un régimen de movimiento a otro en una tubería. Consideremos una tubería cilíndrica de sección constante por la que circula un fluido a una cierta velocidad. Si introducimos en el flujo una aguja fina por la que lentamente inyectamos tinta como se muestra en la figura 4-2 podemos tener dos comportamientos:

- Cuando el régimen del flujo es laminar, la tinta avanza con el agua como un fino hilo, mezclándose lentamente con ésta por procesos de difusión. La mezcla entre el agua y la tinta es muy lenta. Esta situación tiene lugar para diámetros pequeños y velocidades bajas del fluido. En el flujo laminar predomina el efecto de las fuerzas de rozamiento sobre el de las fuerzas de inercia.
- A medida que aumenta la velocidad del flujo, llega un momento en que el régimen de movimiento pasa a ser turbulento. Cuando el régimen de movimiento del flujo es turbulento, la tinta se mezcla de forma inmediata con el agua, diluyéndose en ésta. En estas condiciones predomina el efecto de las fuerzas de inercia sobre el de las fuerzas de rozamiento.

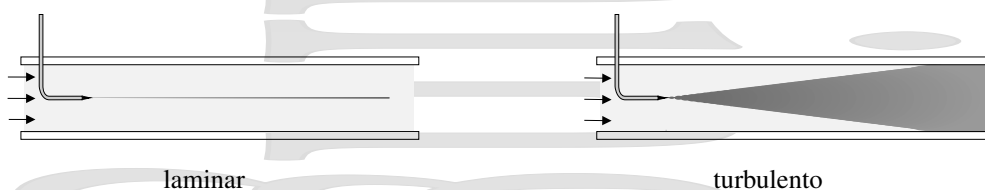


Figura 4-2: Régimen laminar y régimen turbulento. En régimen laminar el movimiento de las capas del fluido es ordenado, en régimen turbulento no.

En realidad el cambio entre régimen laminar y turbulento no es completamente brusco, sino que entre ellos se puede producir un[†] *régimen de transición*. En éste la tinta formaría ondulaciones variables con el tiempo en vez de seguir recta, pero no se produce la mezcla intensa que caracteriza al régimen turbulento.

Dependiendo del tipo de flujo, laminar o turbulento, las fuerzas de rozamiento que aparecen serán de distintos tipos. En el caso de régimen laminar, al ser el movimiento ordenado por capas, las fuerzas que se ejercen entre las distintas capas del fluido son tangentes a las capas y a la dirección del movimiento. Por el contrario, cuando se está en régimen turbulento no hay capas como tales y aparece otra contribución a la fuerza de rozamiento debida a la mezcla entre las distintas capas.

4.2. Viscosidad en fluidos reales.

4.2.1. La condición de no deslizamiento.

Debido a la acción de las fuerzas viscosas de rozamiento, la velocidad en una sección del fluido no será uniforme (p.ej, véase por ejemplo la figura 4-4 para régimen laminar). En particular, se observa que en los puntos del flujo justo en contacto con una superficie sólida la velocidad del fluido es cero con respecto a la misma. A este hecho se le denomina *condición de no deslizamiento* y es una característica importante de los fluidos viscosos que no ocurriría en un hipotético fluido real.

Un ejemplo sencillo de esto se tiene en las aspas de un ventilador, que tienen polvo fino aunque el ventilador se encuentre en movimiento, ya que justo en la superficie del ventilador el aire se encuentra en reposo. Al girar las aspas, éstas pueden mover las partículas grandes de polvo, para las que el fluido se mueve con una velocidad apreciable respecto de las partículas pero no las pequeñas, para las que el fluido se mueve con una velocidad menor al estar más cerca de la superficie. Cuanto más potente sea el ventilador podrá mover partículas algo menores, ya que cerca de la superficie la velocidad irá aumentando, pero siempre quedarán algunas más pequeñas que no se mueven al no haber aumentado la velocidad lo suficiente a una distancia tan próxima a la superficie.

4.2.2. Flujo turbulento y capa límite.

Incluso en el caso de un flujo turbulento general, en realidad no todo el flujo es turbulento. De acuerdo con la condición de no deslizamiento que acabamos de ver, el fluido en contacto con las paredes de una tubería o de algún obstáculo se encuentra en reposo respecto de las mismas. Según nos vamos alejando de esas paredes la velocidad va cambiando gradualmente desde el valor nulo que tenía en contacto con las paredes al valor que tiene el flujo lejos de las mismas. En el primer caso (fluido en contacto con las paredes en reposo) no hay fuerzas de inercia y sólo hay fuerzas de rozamiento, mientras que en el segundo (régimen completamente turbulento) predominan las fuerzas de inercia,teniéndose dos zonas con comportamientos diferenciados (véase la figura 4-3),

1. Zona donde la influencia de las fuerzas de inercia es claramente mayor que la influencia de las fuerzas viscosas (*zona de fluido libre*) y se tiene un régimen localmente turbulento con un perfil de velocidades casi uniforme.
2. Zona de espesor pequeño (*capa límite*) que puede considerarse en reposo respecto del resto del fluido. A su vez esta capa límite puede ser de dos tipos dependiendo de la zona, *capa límite laminar* o *capa límite turbulenta*. En la capa límite laminar la influencia de las fuerzas viscosas predomina sobre la de las fuerzas de inercia y se tiene un régimen localmente laminar con una pequeña velocidad, mientras que en la capa límite turbulenta aunque el régimen es turbulento la velocidad promedio es aún menor que en la zona de fluido libre. Para calcular el espesor de la capa límite se utilizan distintos criterios, uno de los cuales es considerar la zona en la que la velocidad es menor del 99 % de la velocidad en la zona de fluido libre, pero hay otros criterios.

Así, en todo flujo turbulento en contacto con paredes se tiene siempre una capa límite en la región junto a las mismas.

El flujo fuera de la capa límite reacciona a la presencia de la misma como si fuera la superficie física del objeto correspondiente, pero sin la condición de no deslizamiento. De este modo, la presencia de la capa límite da al objeto un perfil “efectivo” que suele ser próximo al perfil real, aunque en algunos casos esto no ocurre así y la diferencia es

[†]No confundir con la zona de transición de régimen turbulento a turbulento completamente desarrollado.

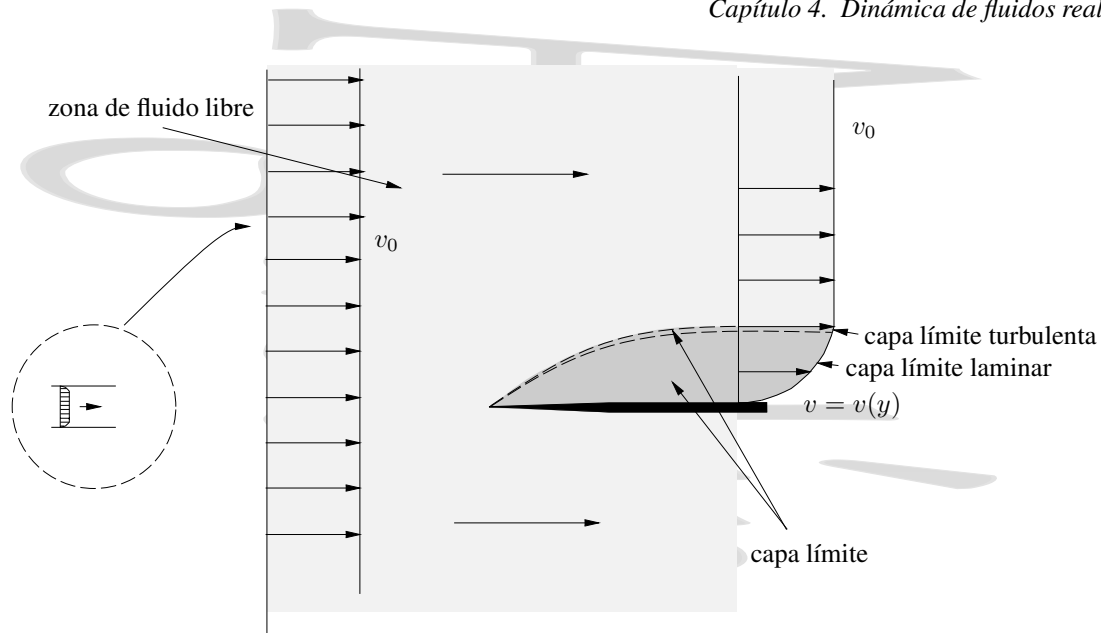


Figura 4-3: Consideremos una pequeña parte de la sección de un flujo viscoso alejada de las paredes, en la que podamos considerar la velocidad uniforme. Si introducimos una cuchilla en el flujo y observamos la distribución de velocidades en las cercanías de la cuchilla se observan dos comportamientos bien diferenciados. Lejos de la cuchilla el efecto de las fuerzas de inercia predomina sobre el de las fuerzas viscosas y se tiene la zona de fluido libre, mientras que cerca de la cuchilla el efecto predominante es el de las fuerzas de inercia y se tiene la denominada capa límite. Justo en contacto con la cuchilla, el fluido se encuentra en reposo, de acuerdo con la condición de no deslizamiento que acabamos de ver.

más marcada. Esto último suele ser indeseable, por ejemplo puede hacer que el ala de un avión pierda sustentación aerodinámica al perder ésta su perfil aerodinámico, causando incluso que el aparato llegue a entrar en pérdidas (pérdida brusca de la sustentación generada por el flujo de aire sobre el perfil aerodinámico).

Una vez conocida forma y dimensiones de la capa límite los cálculos pueden simplificarse notablemente, ya que el movimiento fuera de la misma se considera como si fuera el movimiento de un fluido perfecto, que desliza sin rozamiento sobre la capa límite.

4.2.3. Fluidos newtonianos. Viscosidades dinámica y cinemática .

Hemos visto que la viscosidad es una medida de la resistencia del fluido a las deformaciones continuas producidas por fuerzas tangenciales. ¿Cómo caracterizamos esta viscosidad de forma cuantitativa? Para ello consideremos el caso que se muestra en la figura 4-4, con un fluido que se mueve en régimen laminar con un cierto perfil de velocidades. En estas condiciones, el movimiento tiene lugar de forma ordenada en capas paralelas entre las que aparecen fuerzas de rozamiento tangentes a la dirección del movimiento. Así, sobre una superficie dS sobre la que actúa una fuerza de fricción cortante dF_{roz} aparece una tensión cortante $\tau = dF_{\text{roz}}/dS$.

La dependencia entre dicha tensión cortante y el gradiente de velocidades $\partial v/\partial n$ en la dirección perpendicular a la superficie dS será en general compleja, dependiendo del tipo de fluido y de las características del flujo (donde entre otras cosas se incluyen tensión cortante, presión, temperatura e incluso tiempo). Sin embargo, hay un caso simple de gran importancia, los denominados *fluidos newtonianos* para los que la viscosidad no depende de ninguna variable mecánica como la tensión cortante ni el tiempo y entre τ y $\partial v/\partial n$ existe una relación estrictamente lineal que pasa por el origen de coordenadas, cumpliéndose la denominada *fórmula de Newton*[†] o *ley de Newton* entre los valores absolutos de tensión cortante y gradiente de la velocidad

$$\tau = \frac{dF_{\text{roz}}}{dS} = \mu \frac{\partial v}{\partial n}. \quad (4-2)$$

[†] Como se verá más adelante en (4-8) también se puede definir una viscosidad efectiva a través de una relación como (4-2) para fluidos no newtonianos, pero es de una utilidad más limitada.

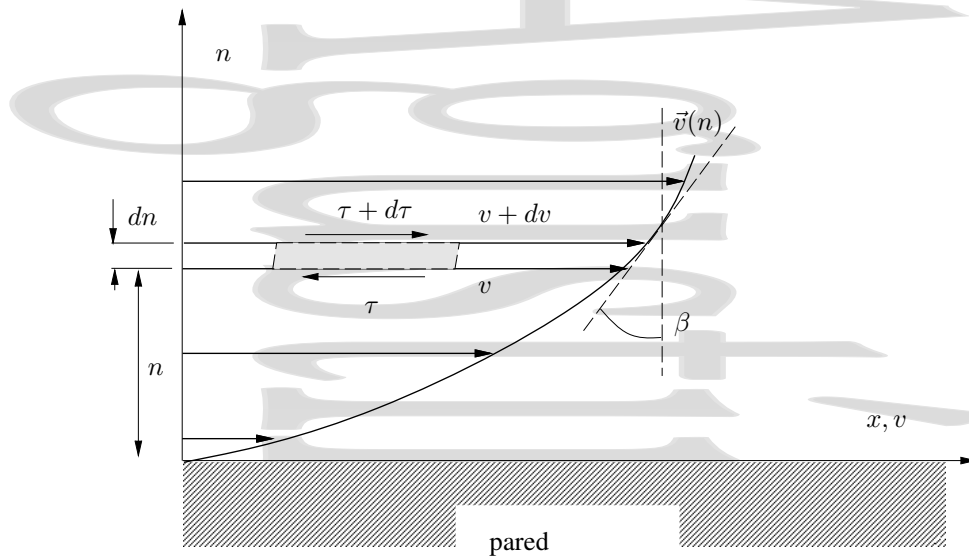


Figura 4-4: En un fluido real en movimiento aparecen fuerzas viscosas de rozamiento \vec{F}_{roz} entre las distintas capas del fluido, con una fuerza por unidad de superficie τ . Esto hace que la velocidad en una sección del fluido no sea uniforme, y en especial será nula en contacto con las paredes. Obsérvese que al ser distintas las velocidades entre las distintas capas, se produce una deformación cortante en las mismas.

El factor de proporcionalidad μ que aparece en esta ecuación es la denominada *viscosidad dinámica* o *coeficiente de viscosidad dinámica* que en fluidos newtonianos es una constante salvo por su dependencia en temperatura y presión. Las unidades de la viscosidad dinámica en el sistema internacional son $[\text{kg m}^{-1}\text{s}^{-1}]$ o $[\text{N s m}^{-2} \equiv \text{Pa s}]$.

Solamente los fluidos newtonianos (por ejemplo agua, aire, Hg, productos petrolíferos típicos, etc...) cumplen esta ley de Newton. Se ha comprobado experimentalmente que dicha ley, que en principio se propuso como hipótesis simplificadora para una primera aproximación al estudio del flujo viscoso, funciona bien en un buen número de fluidos y de hecho es la más usual en Mecánica de Fluidos.

Además de la viscosidad dinámica se define la *viscosidad cinemática* ν en la forma $\nu = \mu/\rho$, y cuyas dimensiones en el sistema internacional son $[\nu] = \text{m}^2\text{s}^{-1}$. La viscosidad cinemática no depende de las características dinámicas del fluido.

En los sistemas CGS e internacional las unidades de las viscosidades dinámica y cinemática son, respectivamente,

	CGS	MKS
μ	1 poise = $1 \text{ dy} \cdot \text{s} \cdot \text{cm}^{-2} = 1 \text{ g/cm} \cdot \text{s} = 10^{-1} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$	$1 \text{ kg/m} \cdot \text{s} = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s} = 10 \text{ poises}$
ν	1 stokes = $1 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1} = 10^{-4} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$	$1 \text{ m}^2\text{s}^{-1} = 10^4 \text{ stokes}$

y en la práctica siguen siendo muy utilizadas las unidades GCS incluso hoy en día al ser más cómodos los órdenes de magnitud que aparecen. Es de esperar que a pesar de esto, el uso del sistema internacional se vaya paulatinamente extendiendo a las mismas. En régimen turbulento no sólo aparecen las fuerzas de rozamiento en la dirección del flujo, sino que también aparecen fuerzas de rozamiento asociadas a la mezcla entre las distintas partes del fluido durante el movimiento del mismo. En este caso la fuerza neta de rozamiento en la dirección del flujo por unidad de superficie se suele representar como la combinación de dos componentes, una de ellas τ_{lam} similar a la descrita en régimen laminar y la otra τ_{mezcla} relacionada con la mezcla que tiene lugar en régimen turbulento,

$$\tau = \tau_{\text{lam}} + \tau_{\text{mezcla}}, \quad (4-3)$$

que también se expresa en la forma

$$\tau = (\tau_{\text{lam}} + \eta) \frac{\partial v}{\partial n} \quad (4-4)$$

Tabla 4-1: Viscosidades dinámica y cinemática de varios fluidos junto con su densidad. La viscosidad dinámica se da en unidades de 10^{-6} Pa s = 10^{-5} poise, la cinemática en unidades de 10^{-6} m²/s y la densidad en kg/m³.

Fluido	T (°C)	Viscosidad dinámica	Densidad	Viscosidad cinemática
Mercurio	0	1690	13595	0,124
	50	1410	13472	0,105
	100	1220	13351	0,091
Etanol	20	1192	791	1,506
Metanol	20	591	810	0,730
Benceno	20	649	899	0,722
Gasolina	20	290	680 – 780	0,427
Glicerina	20	83×10^4	1260	658,7
Aceite de oliva	20	84×10^4	920	913,0
Aceite lubricante	20	26×10^4	900 – 920	279
Aire	20	18	1,293	13,92
Dióxido de carbono	20	16	1,977	8,09
Nitrógeno	20	18,4	1,251	14,71
Oxígeno	20	20,9	1,429	14,62

Tabla 4-2: Viscosidades dinámica y cinemática del agua a distintas temperaturas con sus correspondientes densidades. La viscosidad dinámica se da en unidades de 10^{-6} Pa s = 10^{-5} poise, la cinemática en unidades de 10^{-6} m²/s y la densidad en kg/m³.

T (°C)	Viscosidad dinámica	Densidad	Viscosidad cinemática	T (°C)	Viscosidad dinámica	Densidad	Viscosidad cinemática
0	1793	999,841	1,793	60	469	983,21	4,770
10	1309	999,7	1,309	70	406	977,79	4,152
20	1006	998,2	1,008	80	357	971,8	3,673
30	800	995,65	0,803	90	315	965,31	3,263
40	657	992,21	0,662	100	284	958,35	2,963
50	550						

donde se ha incluido la denominada *turbulencia* η que intenta caracterizar el efecto de la mezcla en la fuerza de rozamiento. Esta turbulencia depende de la densidad y de las características del movimiento del fluido. El cálculo de la segunda parte asociada a la turbulencia es en general muy complejo y se utilizan distintas relaciones empíricas.

4.2.4. Factores que influyen en la viscosidad.

En general la viscosidad apenas depende de la presión. Sin embargo, sí depende de la temperatura, y además de una forma distinta para líquidos y gases. La viscosidad de un líquido disminuye con un aumento de la temperatura, mientras que la viscosidad de un gas tiene el comportamiento contrario, aumenta con la temperatura. Esto es debido a los distintos orígenes de la viscosidad en ambos casos.

La movilidad de las moléculas de un líquido es más limitada, con una presencia importante de fuerzas de cohesión, relacionada con las fuerzas de rozamiento y por tanto con la viscosidad, ya que son estas fuerzas de cohesión las que hacen que durante el movimiento del líquido unas capas frenen a otras. Cuando la temperatura aumenta la cohesión entre las moléculas disminuye, al aumentar la energía cinética de las mismas. Esto da como consecuencia una disminución de la viscosidad.

La viscosidad de los líquidos se aproxima por la siguiente ley empírica,

$$\mu = A e^{-BT} \quad (4-5)$$

donde tanto A como B son magnitudes que se obtienen al ajustar la expresión anterior con los resultados experimentales de un líquido en particular.

En el caso de los gases las moléculas tienen una movilidad mucho mayor y el origen de la viscosidad está relacionado con el paso de moléculas de diferente energía entre distintas capas. Imaginemos dos capas adyacentes, cada una de

ellas con una distinta velocidad de movimiento. En promedio las moléculas de la capa más rápida se mueven a mayor velocidad que las moléculas de la capa más lenta. Como en el sentido del flujo las moléculas de la capa más rápida se mueven en promedio a una velocidad mayor que las de la capa más lenta, el paso de moléculas de la capa más rápida a la más lenta se traducirá en una aceleración de la misma, mientras que el paso de moléculas de la capa más lenta a la más rápida se traducirá en un frenado de estas últimas, dando este movimiento aleatorio lugar al comportamiento viscoso del gas. Como superpuesto a este movimiento se tiene un movimiento aleatorio de las moléculas relacionado con la temperatura del gas, pasarán moléculas de la capa más rápida a la más lenta y viceversa. Este paso será tanto más rápido cuanto mayor sea la temperatura, y esto dará lugar a una mayor intensidad de la aceleración y el frenado a que hacíamos mención en el párrafo anterior, aumentando por tanto la viscosidad con la temperatura.

La dependencia de la viscosidad de los gases con la temperatura se aproxima por una de las siguientes leyes empíricas, conocidas como *ley de Sutherland*

$$\mu = \frac{\mu_0 (T/T_0)^{3/2} (T_0 + S_{Su})}{T + S_{Su}} \quad (4-6)$$

o por la *ley de la potencia*

$$\mu = \mu_0 \frac{T^n}{T_0} \quad (4-7)$$

En ambos casos μ_0 es una viscosidad dinámica conocida a una cierta temperatura, mientras que los valores S_{Su} y n se ajustan con los datos experimentales de un líquido concreto.

4.2.5. Fluidos no newtonianos.

Acabamos de ver que denominamos fluidos newtonianos a aquéllos en los que la dependencia entre la tensión cortante asociada a las fuerzas de rozamiento y el gradiente de velocidades en la dirección perpendicular a la superficie en la que se mide la fuerza cortante es lineal y por tanto la viscosidad no depende de variables mecánicas. Aunque muchos fluidos se comportan como newtonianos en un determinado rango, no todos los fluidos tienen ese comportamiento. Por ejemplo, pastas, lodos fluidos y polímeros de alta densidad son ejemplos de fluidos que no tienen un comportamiento newtoniano. Denominaremos fluidos *no newtonianos* o *anómalos* a aquellos fluidos que no siguen la ley de Newton del rozamiento interno y por tanto su viscosidad depende adicionalmente de variables como tensión cortante o tiempo (en este último caso se dice que tienen memoria). Algunos ejemplos de fluidos no newtonianos son

- Fluidos biológicos.
- Pinturas al aceite.
- Soluciones coloidales.
- Soluciones acuosas de combinados de gran masa molecular.

El comportamiento de los fluidos no newtonianos se representa mediante las *curvas de corriente*, *curvas reológicas*[†] o *reogramas*, como se muestra en la figura 4-5, donde se representa la tensión cortante producida por las fuerzas de rozamiento frente a la tasa de variación de la velocidad en una sección dv/dn . Estas curvas se construyen a partir de datos experimentales obtenidos con viscosímetros de distintos tipos en distintas condiciones de funcionamiento.

Las curvas de corriente correspondientes a los fluidos newtonianos son lineales y se representan en el diagrama por rectas que pasan por el origen de coordenadas, con la viscosidad igual a la pendiente de la recta,

$$\mu = \tan \alpha = \frac{\tau}{dv/dn} \quad (4-2)$$

que caracteriza completamente las propiedades reológicas del fluido a temperatura y presión dadas, con independencia del gradiente de velocidad.

Por el contrario, las curvas de corriente de los líquidos no newtonianos son muy diversas y en el caso general son no lineales (véanse algunos ejemplos en la figura 4-5). En el trabajo común con fluidos no newtonianos se introduce

[†] Precisamente se denomina *Reología* a la rama de la Física de Materiales que estudia la respuesta de los fluidos a los esfuerzos.

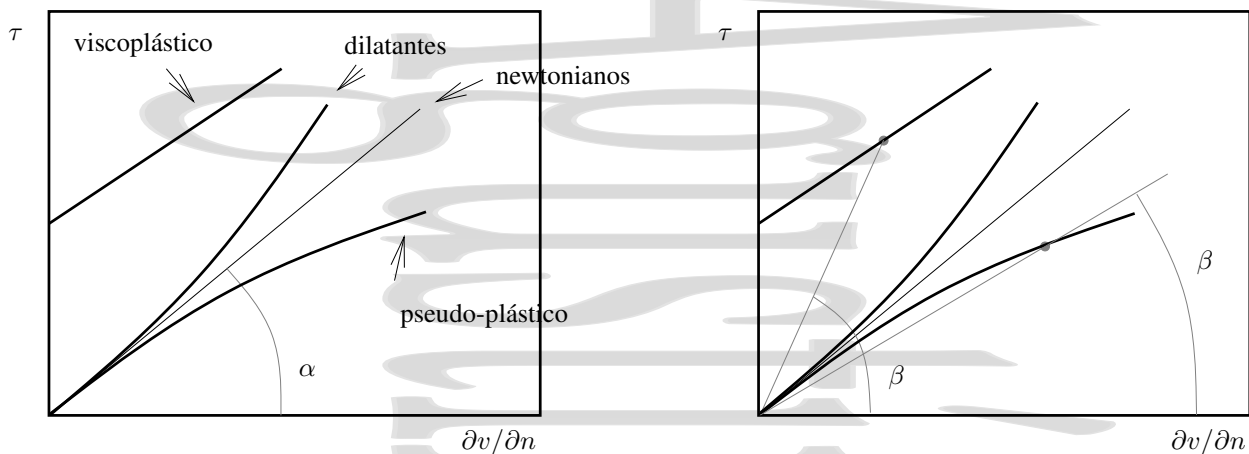


Figura 4-5: Reogramas para distintos tipos de fluidos. En la figura de la izquierda se muestran de forma esquemática algunos de los distintos comportamientos de fluidos no-newtonianos junto con la pendiente $\mu = \tan \alpha$ de la recta para el caso de un fluido newtoniano. En la figura de la derecha se muestra para fluidos no newtonianos el ángulo β cuya tangente daría la viscosidad efectiva $\mu_{ef} = \tan \beta$. Obsérvese que la viscosidad efectiva $\mu_{ef} = \tan \beta$ aumenta con τ en los fluidos dilatantes y disminuye en los pseudo-plásticos.

el concepto de *viscosidad efectiva*, que permite con ciertas limitaciones realizar los cálculos mediante las fórmulas de fluidos newtonianos.

$$\mu_{ef} = \tan \beta = \frac{\tau}{dv/dn} \quad (4-8)$$

Su valor se calcula en el diagrama reológico (figura 4-5) como la pendiente de las rectas que unen el origen de coordenadas con los puntos de la curva de corriente para unas condiciones del flujo dadas.

Para un líquido dado esta viscosidad efectiva no es una magnitud constante sino que depende de la tasa de cambio de la velocidad dv/dn y de la tensión de desplazamiento τ_0 . Como sus valores se determinan solamente para un estado instantáneo del flujo su utilidad es mucho más reducida que la de la viscosidad.

Dependiendo del comportamiento de los líquidos en el diagrama reológico se tienen distintos comportamientos no newtonianos. Algunos de los más habituales son:

Fluidos pseudo-plásticos: En los fluidos pseudo-plásticos la viscosidad efectiva (4-8) disminuye al aumentar la tensión cortante aplicada τ o la tasa de variación de la velocidad dv/dn . Así, dan la apariencia de diluirse al fluir (y por eso también se les denomina en inglés “shear-thinning”).

Las pinturas modernas suelen ser fluidos pseudo-plásticos. Al aplicarlas con el rodillo se aplica una tensión cortante y disminuye la viscosidad efectiva de forma que se pueden extender con facilidad. Al dejar de aplicarlas la tensión cortante desaparece y la pintura se hace más viscosa y no gotea. Otros ejemplos son el plasma sanguíneo o las tintas.

Un ejemplo muy vistoso se observa en un gel de bentonita de los utilizados en cosmética. La bentonita es una arcilla de grano muy fino con la que se pueden preparar disoluciones coloidales. El gel de bentonita tiene una consistencia semisólida e incluso, si se introducen en el mismo pequeñas piezas de plástico, puede mantenerlas en suspensión sin movimiento aparente. Sin embargo, si el frasco tiene un vaporizador, al apretar el mismo el gel se ve sometido a altas tensiones cortantes y se comporta como un líquido poco viscoso que sale a través del vaporizador.

Fluidos dilatantes: En los fluidos dilatantes la viscosidad efectiva (4-8) aumenta cuando aumenta la tensión cortante τ o la tasa de variación de la velocidad dv/dn y por tanto parece que se espesan al fluir (por eso también se les denomina en inglés “shear-thickening”).

Ejemplos de fluidos dilatantes son la arena mojada o los compuestos acuosos con concentraciones altas de sólidos como la harina de maíz mezclada con agua o las disoluciones muy concentradas de almidón. Cuanto mayor es la velocidad del agitador, mayor es la viscosidad observada.

Las curvas de corriente de los fluidos pseudo-plásticos y dilatantes se describen muy bien en régimen laminar mediante

la expresión

$$\tau = \kappa \left(\frac{dv}{dn} \right)^n \quad (4-9)$$

donde κ y n son magnitudes constantes para un líquido dado. κ es una medida del grado de consistencia del líquido (teniéndose mayor κ a mayor viscosidad) mientras que n representa el grado de comportamiento no newtoniano. Los fluidos *newtonianos* corresponden al caso particular $\kappa = \mu$ y $n = 1$, los fluidos *pseudoplásticos* al caso $n < 1$ y los *dilatantes* a $n > 1$.

Materiales no lineales de Bingham o viscoso-plásticos: Otro tipo de fluido no newtoniano corresponde no descrito por la ecuación anterior corresponde a los *materiales lineales de Bingham* o fluidos *viscoplásticos*. En estos materiales el comportamiento es similar al de un sólido para tensiones cortantes por debajo de un determinado umbral, es decir presenta una deformación fija para un cierto valor de la tensión cortante. Sin embargo, cuando el esfuerzo cortante es mayor que ese umbral, el material presenta el comportamiento de un fluido viscoso newtoniano, en la forma

$$\tau = \tau_0 + \mu \frac{dv}{dn} \quad (4-10)$$

donde se conoce a τ como *tensión de desplazamiento*, *tensión inicial de desplazamiento* o *límite de fluidez*. El hormigón fresco normalmente se modeliza como un material no lineal de Bingham. También el “ketchup” se comporta como tal, en reposo se vuelve sólido y es difícil de verter, y es necesario aplicar una tensión cortante (al agitar) para que empiece a fluir más fácilmente.

En otros casos, el comportamiento depende del tiempo de aplicación del cortante. Por ejemplo, en los *fluidos tixotrópicos* la viscosidad efectiva disminuye al aumentar el tiempo de aplicación del esfuerzo cortante, y después de un reposo prolongado recuperan sus condiciones iniciales. En los *fluidos reopécticos* la viscosidad efectiva aumenta después de un tiempo de aplicación de la fuerza cortante, volviendo a sus condiciones iniciales transcurrido un tiempo de reposo.

Otro tipo de materiales presentan una combinación de características viscosas y elásticas especial y se les denomina fluidos *viscoelásticos*. Estos materiales se comportan como sólidos ante variaciones rápidas del esfuerzo aplicado y tienden a recuperar su forma una vez cesa la perturbación (es decir tienen un comportamiento elástico), pero se comportan como fluidos ante pequeños esfuerzos continuados produciéndose disipación de energía durante la deformación (son viscosos). Los plásticos a temperatura ambiente sometidos a una carga presentan un comportamiento viscoelástico, así como de forma muy espectacular una papilla espesa de harina de maíz.

4.3. Ecuaciones de movimiento de los fluidos reales.

¿Qué forma tienen las ecuaciones del movimiento para un fluido viscoso? En el caso de un flujo viscoso tendremos que tener en cuenta que, además de las fuerzas de presión y de las fuerzas de masa como la gravitatoria que teníamos en cuenta a la hora de obtener las ecuaciones de Euler (3-20), sobre las superficies de un fluido viscoso en movimiento también actúan las fuerzas viscosas de rozamiento. En el caso de flujo laminar estas fuerzas de rozamiento son paralelas al flujo, pero en el caso más general en el que hay mezcla entre las distintas capas habrá componentes de las fuerzas de rozamiento en las distintas direcciones.

El análisis riguroso de este problema es complejo, aunque expondremos bastantes aspectos del mismo. Para ello consideraremos el elemento infinitesimal de volumen del flujo que se muestra en la figura 4-6. El estado de tensiones en un punto del fluido en dicho elemento puede expresarse mediante el tensor de tensiones

$$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} -p + \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & -p + \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & -p + \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (4-11)$$

donde cada elemento σ_{ij} del tensor[†] representa la fuerza por unidad de superficie que actúa en la dirección i sobre la cara perpendicular al eje j de las superficies del elemento de volumen. En este tensor aparece una componente de

[†]Recuérdese que σ_{ii} o τ_{ii} representan un esfuerzo normal y σ_{ij} ($i \neq j$) o τ_{ij} ($i \neq j$) un esfuerzo cortante

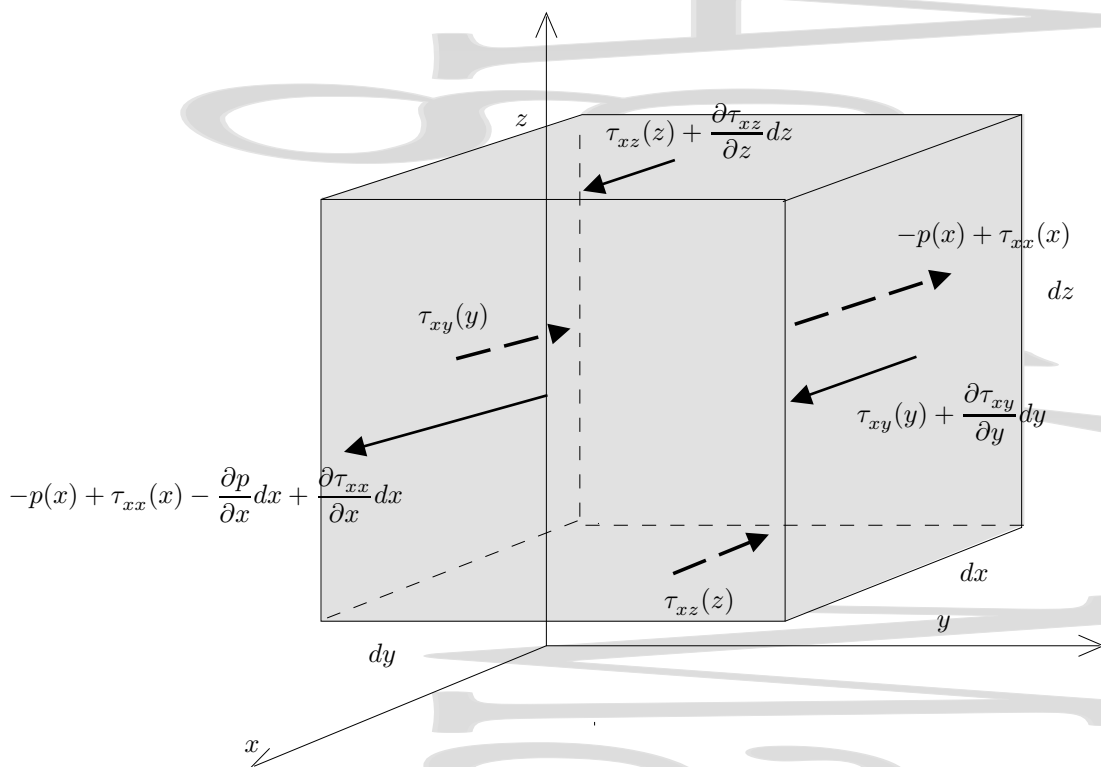


Figura 4-6: Componente x de las fuerzas que actúan sobre un fluido real en movimiento en las distintas caras de un elemento de volumen.

presión hidrostática p (con signo negativo, ya que corresponde a una compresión del elemento) junto con los esfuerzos viscosos τ_{ij} que aparecen asociados a los gradientes de velocidad que tienen lugar en las distintas direcciones durante el movimiento (cuando hay rozamiento viscoso aparecen estos gradientes de velocidad). Las componentes cortantes $\tau_{ij} (i \neq j)$ están asociadas a la tasa de cambio en la componente i de la velocidad en un cambio de posición transversal en la dirección j (como por ejemplo el que se representa en la figura 4-4) mientras que las componentes normales τ_{ii} están asociadas a la tasa de cambio en la componente i de la velocidad en un cambio de posición longitudinal en la misma dirección i (por ejemplo como los cambios de velocidad que aparecen en una región en la que el flujo se estrecha o ensancha en esa dirección).

La tensión descrita por el tensor de tensiones $[\sigma_{ij}]$ será en general inhomogénea, es decir, varía de un punto a otro del flujo. Calculemos algunas fuerzas de superficie que actúan sobre el elemento de volumen infinitesimal de la figura. En primer lugar, la componente x de la fuerza que actúa sobre las caras x y $x+dx$ será

$$dF_{xx}(x) = [p(x) - \tau_{xx}(x)] dydz$$

sobre la cara que se encuentra a una distancia x del plano yz y

$$dF_{xx}(x+dx) = [-p(x+dx) + \tau_{xx}(x+dx)] dydz$$

sobre la cara que se encuentra a una distancia $x+dx$ del plano yz . Si desarrollamos en serie esta última expresión, se tiene

$$dF_{xx}(x+dx) = \left[-p(x) - \frac{\partial p}{\partial x} dx + \tau_{xx}(x) + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx \right] dydz$$

quedando la fuerza neta que actúa en la dirección x sobre las caras perpendiculares a esta misma dirección

$$dF_{xx}^{\text{neta}} = dF_{xx}(x) + dF_{xx}(x+dx) = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \right) dx dy dz \quad (4-12a)$$

Un cálculo análogo para las fuerzas en la dirección x que actúan sobre las caras perpendiculares a las direcciones y y z da

$$dF_{xy}^{\text{neta}} = dF_{xy}(y) + dF_{xy}(y + dy) = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dx dy dz \quad (4-12b)$$

$$dF_{xz}^{\text{neta}} = dF_{xz}(z) + dF_{xz}(z + dz) = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dx dy dz \quad (4-12c)$$

quedando la fuerza neta en la dirección x como

$$dF_x^{\text{neta}} = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right). \quad (4-13a)$$

Un cálculo análogo da, para las fuerzas netas en las direcciones y y z

$$dF_y^{\text{neta}} = \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \quad (4-13b)$$

$$dF_z^{\text{neta}} = \left(-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right). \quad (4-13c)$$

Multiplicando estas ecuaciones respectivamente por los vectores unitarios \vec{u}_x , \vec{u}_y y \vec{u}_z y sumando vectorialmente se tiene, para la fuerza neta que actúa sobre las distintas superficies

$$\begin{aligned} dF_{\text{sup}}^{\text{neta}} = & -\frac{\partial p}{\partial x} \vec{u}_x - \frac{\partial p}{\partial y} \vec{u}_y - \frac{\partial p}{\partial z} \vec{u}_z + \\ & \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \\ & \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \vec{u}_y + \\ & \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \vec{u}_z. \end{aligned} \quad (4-14)$$

De una forma más compacta esta expresión se puede escribir en la siguiente forma

$$dF_{\text{sup}}^{\text{neta}} = -\vec{\nabla} p + \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (4-15)$$

o en notación tensorial

$$dF_{\text{sup}}^{\text{neta}} = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \hat{\tau}_{ij}. \quad (4-16)$$

De esta forma, la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento para un fluido viscoso se escribe, en su forma diferencial, como

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = \rho \vec{f}_{\text{ext}} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \hat{\tau}_{ij} = \rho g(-\vec{u}_z) - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \hat{\tau}_{ij} \quad (4-17)$$

donde se muestra explícitamente la aceleración con sus componentes local y convectiva (3-27).

4.3.1. Fluido perfecto o flujo no viscoso.

Obviamente para el caso de un fluido perfecto, todas las componentes del tensor $\hat{\tau}_{ij}$ son nulas y se recupera la ecuación de Euler para flujo no viscoso en un fluido sometido a la fuerza gravitatoria

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f}_{\text{ext}} - \vec{\nabla} p = \rho g(-\vec{u}_z) - \vec{\nabla} p \quad (3-20)$$

4.3.2. Fluido newtoniano. Las ecuaciones de Navier-Stokes.

Para un fluido newtoniano los esfuerzos viscosos son proporcionales a las derivadas espaciales de la velocidad y al coeficiente de viscosidad. Puede verse (véase por ejemplo [10]) que para el caso de flujo incompresible genérico en tres dimensiones, las componentes del esfuerzo viscoso para un fluido newtoniano quedan, generalizando la ecuación (4-2) de la ley de Newton de la viscosidad para para flujo paralelo, en la forma dada por la denominada *ley de la viscosidad de Stokes*

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (4-18a)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (4-18b)$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (4-18c)$$

para las componentes normales, y

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad (4-18d)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \quad (4-18e)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \quad (4-18f)$$

para las cortantes. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación anterior y utilizando la ecuación de continuidad para un flujo incompresible (3-11) se obtienen las *ecuaciones de Navier-Stokes*

$$\rho \frac{dv_x}{dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \quad (4-19a)$$

$$\rho \frac{dv_y}{dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \quad (4-19b)$$

$$\rho \frac{dv_z}{dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad (4-19c)$$

para un fluido newtoniano que también pueden escribirse en forma más compacta como.

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f}_{\text{ext}} - \vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{v} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{v}. \quad (4-20)$$

Nótese que éste es un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales de segundo orden que tiene cuatro incógnitas, v_x , v_y , v_z y p . Para resolverlo, necesitaremos una cuarta ecuación que no es sino la ecuación de continuidad (3-11) para un flujo incompresible.

Capítulo 5

Flujo de fluidos en tuberías.

Índice del capítulo

5.1. Características del flujo en una tubería.	57
5.1.1. Número de Reynolds en una tubería.	57
5.1.2. Distribución de velocidades y tensiones cortantes en régimen laminar en una tubería. Fórmula de Poiseuille.	58
5.1.3. Perfiles de flujo en una tubería	60
5.2. Variación de altura de carga debida a una máquina.	60
5.3. Pérdidas de carga. Generalidades.	61
5.3.1. Pérdidas de carga lineales.	62
5.3.2. Pérdidas de carga locales o singulares.	66
5.4. La ecuación de Bernoulli generalizada.	68
5.4.1. Representación gráfica de la pérdida de carga.	69
5.5. Redes de tuberías.	70
5.6. Cavitación.	71
5.7. Golpe de ariete o choque hidráulico.	71

5.1. Características del flujo en una tubería.

Hasta ahora hemos tratado un flujo genérico, quizás en contacto con una superficie. Trataremos ahora el movimiento de un fluido en una tubería, con las restricciones impuestas por las características de la misma.

5.1.1. Número de Reynolds en una tubería.

En primer lugar nos interesará tratar la influencia relativa de las fuerzas de inercia y viscosas en el movimiento de un fluido a lo largo de una tubería y parametrizar de alguna forma esta influencia.

Para ello utilizaremos el número de Reynolds, que también se utiliza en otros tipos de flujo. El *número de Reynolds* es un parámetro adimensional que surge a partir de la relación entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas en las ecuaciones de Navier-Stokes (4-19) que se acaban de ver. El término de inercia $\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$ es el asociado con la componente convectiva de la aceleración en (4-17) y dimensionalmente va como $\rho v^2/L$, mientras que el término viscoso $\mu \nabla^2 \vec{v}$ es el asociado con la parte viscosa en (4-20), y va dimensionalmente como $\mu v/L^2$, siendo L una longitud característica del sistema y v una velocidad representativa del flujo. Como ambos términos son dimensionalmente equivalentes, su cociente será una magnitud adimensional.

La definición concreta del número de Reynolds depende del sistema que se está estudiando. En particular, se define el número de Reynolds para el flujo en una tubería en la forma

$$\frac{\rho v^2/L}{\mu v/L^2} \Rightarrow Re = \frac{\rho \bar{v} D}{\mu} = \frac{\bar{v} D}{\nu} \quad (5-1)$$

donde \bar{v} es la velocidad media como velocidad representativa del flujo, D es el diámetro de la tubería (en otros sistemas, se tratará de una longitud característica del sistema), ρ es la densidad del fluido, μ es la viscosidad dinámica y $\nu = \mu/\rho$

es la viscosidad cinemática. Esta definición tiene sentido para fluidos newtonianos. Para fluidos no newtonianos a veces se define un número de Reynolds generalizado para que alguna de las expresiones que veremos aquí sigan teniendo la misma forma, pero no lo trataremos.

Se denomina *velocidad característica* a la velocidad por debajo de la cual toda turbulencia es amortiguada por la acción de la viscosidad del fluido y por tanto se tiene régimen laminar. Experimentalmente se observa el paso de uno a otro régimen introduciendo un colorante en el flujo como se mencionó anteriormente. Los resultados obtenidos muestran que de forma aproximada para números de Reynolds menores que un valor en torno a 2300 el régimen de movimiento del fluido en la tubería es laminar (predominan las fuerzas de rozamiento) mientras que para números de Reynolds mayores el régimen de movimiento en la tubería es turbulento (predominan las fuerzas de inercia).

En realidad, el cambio no es tan brusco ni a un número de Reynolds tan definido como parece deducirse de lo anterior por varias razones. Por una parte, hay un régimen intermedio variable (denominado[†] *régimen de transición*) en el que el colorante sufre oscilaciones y ligeras inestabilidades variables con el tiempo, pero manteniéndose delgado y sin que se produzca mezcla intensiva con el fluido. Por otra parte, hay alguna dependencia de las condiciones concretas en que se realiza el proceso, lo que afecta a las condiciones exactas en las que se produce el paso de régimen laminar a turbulento. Aunque no hay unanimidad entre los distintos autores en cuanto a los límites de los distintos rangos, podemos considerar que para números de Reynolds menores que 2000 el régimen es siempre laminar y que para números de Reynolds mayores que 4000 es siempre turbulento. Por las razones anteriores, en el intervalo intermedio entre 2000 y 4000 la situación no está tan clara y no es fácil predecir con exactitud si el régimen es laminar, turbulento o de transición en base exclusivamente al número de Reynolds, por lo en un diagrama de Moody (véase la figura 5-7) se le suele denominar *zona crítica*.

5.1.2. Distribución de velocidades y tensiones cortantes en régimen laminar en una tubería. Fórmula de Poiseuille.

Determinaremos ahora el caudal o gasto Q en una tubería cilíndrica de radio R como la representada en la figura 5-2 en condiciones de flujo laminar. A través de la tubería de sección constante fluye un líquido (homogéneo e incompresible) de viscosidad cinemática ν y las presiones en dos puntos 1 y 2 separados una distancia L son respectivamente p_1 y p_2 .

Si consideramos régimen estacionario, al ser $v \neq v(t)$ no hay aceleración en la dirección axial y la suma de fuerzas en esta dirección es cero. Por otra parte, el movimiento de las capas de líquido en la tubería en régimen laminar se asemejaría al movimiento de una serie de tubos cilíndricos de espesor infinitesimal que rozan entre sí

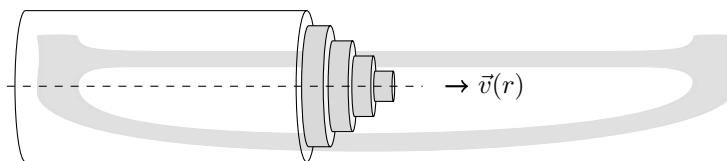


Figura 5-1: El movimiento de un fluido en una tubería en régimen laminar se asemeja al movimiento de una serie de tubos cilíndricos de espesor infinitesimal que rozan entre sí, de forma que las capas más alejadas del eje de la tubería frenan a las capas más cerca del mismo.

Observando el equilibrio de fuerzas en un cilindro imaginario de radio r (distancia al eje del cilindro) y longitud L dirigido según el eje mostrado en la figura, que forma un ángulo θ con la horizontal se tiene, en la dirección axial,

$$\sum F = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 S_1 - p_2 S_2 - \tau S_{\text{lateral}} - mg \sin \theta = 0.$$

Como la masa m es ρSL y se cumple $L \sin \theta = z$ y $S_1 = S_2 = S$, se tiene

$$\tau S_{\text{lateral}} = (p_1 - p_2)S - \rho g z S,$$

[†]No confundir con la zona de transición de régimen turbulento a turbulento completamente desarrollado que puede representarse en el diagrama de Moody (figura 5-7) para la zona en la que el régimen es turbulento pero el coeficiente de fricción f aún depende del número de Reynolds.

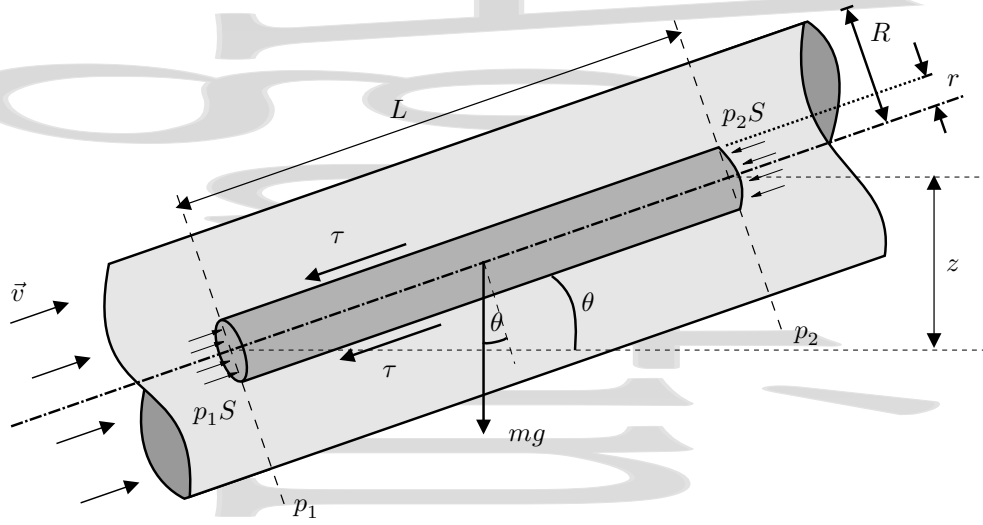


Figura 5-2: Tubería cilíndrica por la que circula un fluido newtoniano.

que a su vez da

$$\tau 2\pi r L = [(p_1 - p_2) - \rho g z] \pi r^2 \Rightarrow \frac{2L\tau}{\rho g} = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} - (z_1 - z_2) = -\Delta h_{12}^{\text{piezo}} = \Delta h_{21}^{\text{piezo}},$$

donde $\Delta h_{12}^{\text{piezo}}$ es la variación de altura piezométrica de 1 a 2 y $\Delta h_{21}^{\text{piezo}} = -\Delta h_{12}^{\text{piezo}}$ la disminución de altura piezométrica de 1 a 2 o variación de altura piezométrica de 2 a 1.

Por otra parte, podemos utilizar la ecuación de Bernoulli generalizada (4-1) entre las secciones 1 y 2. Como se cumple $S_1 = S_2 = S$ y $z = z_2 - z_1$ se obtiene para la pérdida de carga Δh_{12}

$$\Delta h_{12} = \frac{p_1}{\rho g} + z_1 - \left(\frac{p_2}{\rho g} + z_2 \right) = -\Delta h_{12}^{\text{piezo}} = \Delta h_{21}^{\text{piezo}}.$$

Es decir, en las condiciones dadas, como la sección de la tubería es constante, la pérdida de carga Δh_{12} es igual a la disminución de la altura piezométrica entre los dos puntos, $\Delta h_{12} = \Delta h_{21}^{\text{piezo}}$, por lo que en la ecuación anterior podemos utilizar indistintamente la pérdida de carga o la disminución de la altura piezométrica. Así, se obtiene la *distribución de tensiones cortantes* en un fluido que circula en régimen laminar por una tubería de sección circular constante

$$\tau(r) = \frac{\rho g \Delta h_{21}^{\text{piezo}}}{2L} r = \frac{\rho g \Delta h_{12}}{2L} r \quad (5-2)$$

Si el régimen del flujo no fuera laminar habría dos componentes de la tensión cortante, la mostrada arriba y además una originada en la mezcla de fluido.

Impongamos ahora una condición adicional, que el fluido anterior sea además un fluido newtoniano. En este caso, la ley de Newton (4-2) nos da[†]

$$\tau = -\mu \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\rho g \Delta h_{21}^{\text{piezo}} r}{2L}$$

que integrado entre la pared de la tubería (donde la velocidad es 0 por la condición de no deslizamiento) y un punto genérico a una distancia r del eje de la misma en el que la velocidad es v da

$$-\int_0^v dv = \int_R^r \frac{\rho g \Delta h_{21}^{\text{piezo}} r dr}{2\mu L}$$

[†]El signo $-$ aparece para compensar que $\partial v / \partial r < 0$ al tomarse los ejes respecto de $r = 0$, el sentido de la fuerza cortante se ha puesto explícitamente.

nos da

$$v(r) = \frac{\rho g \Delta h_{21}^{\text{piezo}}}{4\mu L} (R^2 - r^2) = \frac{\rho g \Delta h_{12}}{4\mu L} (R^2 - r^2). \quad (5-3)$$

Como vemos, la ley de distribución de velocidades para un fluido newtoniano en régimen estacionario y laminar tiene forma parabólica coincidiendo el eje de la parábola con el eje de la tubería (figura 5-4). El valor máximo de la velocidad se tiene donde la parábola alcanza su valor máximo, en el eje de la tubería en el que $r = 0$

$$v_{\text{máx}} = \frac{\rho g R^2}{4\mu L} \Delta h_{21}^{\text{piezo}} = \frac{\rho g R^2}{4\mu L} \Delta h_{12} \quad (5-4)$$

Calculemos ahora el caudal total a través de la tubería. Como a través de una sección infinitesimal dS el caudal viene dado por $dQ = v dS$, el caudal total será la integral de los caudales elementales

$$\bar{v} S = Q = \int_S v dS = \int_0^R v 2\pi r dr = \frac{\pi R^4}{8\mu L} \rho g \Delta h_{21}^{\text{piezo}} = \frac{\pi R^4}{8\mu L} \rho g \Delta h_{12} \quad (5-5)$$

que es la denominada *Fórmula de Poiseuille*. Si comparamos con la expresión anterior (5-4) para la velocidad máxima se observa que $Q = \frac{1}{2} \pi R^2 v_{\text{máx}}$ y si tenemos además en cuenta que la velocidad media está relacionada con el caudal a través de $Q = \bar{v} S$ y que la sección es precisamente $S = \pi r^2$ se tiene de forma inmediata que

$$\bar{v} = \frac{Q}{S} = \frac{\rho g R^2}{8\mu L} \Delta h_{21}^{\text{piezo}} = \frac{\rho g R^2}{8\mu L} \Delta h_{12} = \frac{1}{2} v_{\text{máx}} \quad (5-6)$$

para esta distribución parabólica de velocidades.

5.1.3. Perfiles de flujo en una tubería

Como acabamos de ver en la expresión (5-3), el perfil de velocidades en el flujo laminar de un fluido newtoniano en una tubería tiene una forma parabólica como se muestra en la figura 5-3.

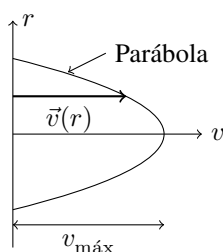


Figura 5-3: En el flujo laminar de un fluido newtoniano en una tubería la distribución de velocidades en función de la distancia al eje tiene forma parabólica.

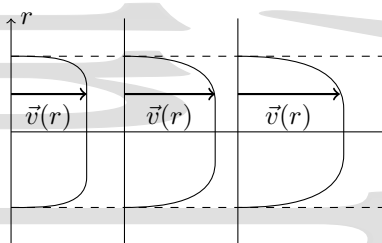


Figura 5-4: Ejemplos de perfiles de velocidad en el flujo turbulento a través de una tubería. En la región próxima a la pared de la tubería se tiene una capa límite donde el flujo es laminar y la velocidad varía rápidamente con la distancia al eje de la tubería. Fuera de esa región, la variación es pequeña.

En el caso más general en el que el flujo es turbulento se tendrá una región de variación rápida de la velocidad en las cercanías de las paredes de la tubería. Esta región corresponde a la capa límite en la que predomina el régimen laminar. Fuera de esta región, para puntos de la sección más alejados de las paredes de la tubería la variación de la velocidad con la distancia al eje se hace mucho más lenta e incluso prácticamente nula. En esta región el flujo es turbulento. Dependiendo del espesor de la capa límite el perfil de velocidades en régimen turbulento variará, manteniendo siempre la simetría axial. En la figura 5-4 se muestran ejemplos de distintos casos hipotéticos.

5.2. Variación de altura de carga debida a una máquina.

Entre otras condiciones, la ecuación de Bernouilli (3-37) es válida en un flujo que conserva la energía. Además de como consecuencia de la disipación de energía producida por las fuerzas de rozamiento que actúan en el flujo en una

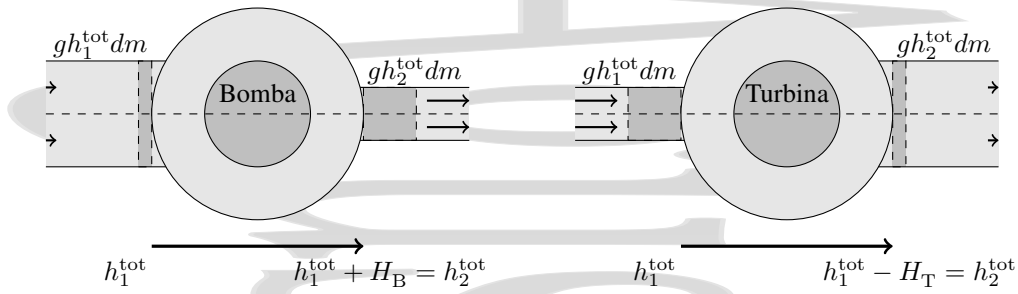


Figura 5-5: Efecto de una máquina (bomba o turbina) en el flujo. La energía total del flujo por unidad de peso del mismo cambia por la acción de la máquina.

tubería (que se verá en el capítulo siguiente) la energía por unidad de peso del fluido puede variar en ciertos puntos del flujo por la acción de distintas máquinas hidráulicas, aunque el flujo en sí sea un flujo esencialmente no viscoso. Estas máquinas hidráulicas pueden

- Aportar energía al flujo (*bombas*).
- Extraer energía del flujo (*turbinas*).

El aporte de energía que realiza una bomba al flujo se representa habitualmente a través de la energía aportada por unidad de peso del fluido, a la que se denomina *altura de carga de la bomba* o altura aportada por la bomba H_B . Igual ocurre para la energía extraída por una turbina, que se representa mediante H_T , energía extraída por unidad de peso del fluido.

Veamos ahora la relación entre la potencia de una máquina y la altura de carga de la misma. Para empezar, consideremos una bomba como la que se muestra en la figura 5-5 a través de la cual circula una masa dm de fluido en un intervalo de tiempo dt . Si denominamos h_1^{tot} a la energía total por unidad de peso a la entrada de la bomba y h_2^{tot} a la energía total por unidad de peso a la salida de la bomba, la energía de un elemento de masa dm justo antes de entrar en la bomba será $gh_1^{\text{tot}} dm$ mientras que la energía del elemento de masa dm justo al salir de la bomba será $gh_2^{\text{tot}} dm$. Por tanto, la variación de energía del fluido en el intervalo de tiempo dt es $g(h_2^{\text{tot}} - h_1^{\text{tot}})dm = gH_B dm$ donde H_B es la *altura de carga de la bomba* o energía por unidad de peso aportada por la misma. La *potencia suministrada por la bomba* será entonces, en función de su altura de carga

$$P_{\text{bomba}} = \frac{gH_B dm}{dt} = gH_B \frac{dm}{dt} = gH_B Q_m = \rho g Q H_B \quad (5-7)$$

La misión de la turbina es extraer energía del fluido, disminuyendo su energía. Análogamente al caso de las bombas, se denomina *altura H_T de la turbina* a la energía que ésta extrae por unidad de peso del fluido. De forma semejante al caso de la bomba, la *potencia extraída por la turbina* está relacionada con la *altura de carga H_T* de ésta mediante

$$P_{\text{turbina}} = \rho g H_T Q = g H_T Q_m \quad (5-8)$$

Si consideramos una sección del flujo en la que la altura total de carga tiene un valor h^{tot} , el valor de la magnitud

$$\Phi = \rho g h^{\text{tot}} \quad (5-9)$$

representa la energía de la corriente fluida que atraviesa dicha sección en la unidad de tiempo y se denomina *flujo de energía de la corriente fluida*. Algunos autores la denominan *potencia de la corriente* aunque aquí no se realice ningún trabajo.

5.3. Pérdidas de carga. Generalidades.

El flujo de un fluido en una tubería viene acompañado de una disipación de energía, que por motivos prácticos se suele expresar tradicionalmente en términos de energía por unidad de peso del fluido, con dimensiones de longitud y denominada habitualmente *pérdida de carga*.

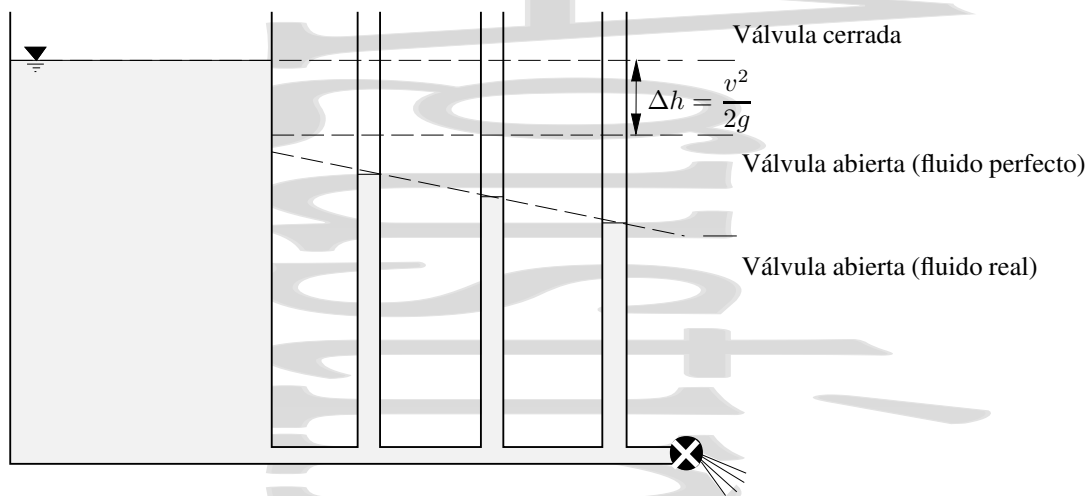


Figura 5-6: Se comparan los niveles del agua en los piezómetros cuando la válvula está cerrada, y cuando, estando abierta, circula por ella un fluido perfecto y un fluido real.

Como un ejemplo, consideremos el depósito de la figura 5-6 que desagua a través de un tubo de sección constante en el cual se han colocado una serie de piezómetros.

Si la válvula de salida está cerrada, el nivel en todos los piezómetros es el mismo e igual al nivel de agua en el depósito. Al abrir la válvula se observan distintos comportamientos dependiendo de si tenemos un fluido perfecto o un fluido real. Si lo que tenemos es un fluido perfecto, el nivel de agua en todos los piezómetros baja la misma cantidad, y ésta es igual a la altura de velocidad,

$$\Delta h = \frac{v^2}{2g}$$

Por el contrario, si lo que tenemos es un fluido real, hay una disminución en el nivel de agua adicional a la que aparece en un fluido perfecto, y que tiene lugar de forma continua a lo largo del tubo (pérdida de carga lineal). Además, si hubiéramos puesto un piezómetro justo en la salida del depósito, veríamos que se produce otra disminución adicional justo en la salida del depósito debida a disipación de energía en ese punto singular (pérdida de carga singular en el paso de depósito a tubería). Estas disminuciones del nivel de los piezómetros respecto del nivel que teníamos en un fluido perfecto están asociadas a una disipación de energía a lo largo del flujo que representamos mediante la pérdida de carga. Como en este caso de tubería horizontal la presión va asociada al nivel en los piezómetros, la pérdida de carga se manifiesta como una disminución de presión en el sentido del flujo.

5.3.1. Pérdidas de carga lineales.

Las *pérdidas de carga lineales* son aquellas que tienen lugar de forma continua a lo largo del flujo, por el hecho de que el fluido avance, aunque no cambien ni la dirección del flujo ni la sección de la tubería.

Estas pérdidas de carga son, en general, una función compleja de la geometría del sistema, de las propiedades del fluido, y de las características del flujo. A partir de las observaciones experimentales, el comportamiento de las pérdidas de carga lineales se modeliza en forma “proporcional” al cuadrado de la velocidad promedio en la mayor parte de los casos de interés técnico. Esto se expresa en función de la altura de velocidad mediante la conocida *ley de Darcy-Weisbach* para las pérdidas de carga lineales debidas al rozamiento,

$$\Delta h_{\text{lineal}} = f \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2g}. \quad (5-10)$$

El factor f es el denominado *coeficiente de fricción* que en general varía poco para pequeños cambios del flujo y es constante para el caso particular de un flujo fuertemente turbulento.

Este factor f no es estrictamente un factor de proporcionalidad[†] ya que en general depende de forma compleja de las características del flujo. En concreto, el coeficiente de fricción f depende del número de Reynolds, de la rugosidad relativa de la tubería ϵ/D y de la sección de la tubería.

$$f = f(Re, \epsilon/D, \text{sección de la tubería})$$

donde la *rugosidad relativa* representa la relación entre la *rugosidad* de un elemento típico y las dimensiones de la tubería representadas por el diámetro D de la misma.

No sólo es importante la magnitud, sino también la forma de la sección de la canalización, ya que diferencias de la forma circular dan lugar a flujos secundarios que aumentan la caída de presión. Cuando se trabaja con canalizaciones no circulares se utiliza generalmente el *radio hidráulico* o el *diámetro hidráulico*

$$R_{\text{hidráulico}} = \frac{2S}{\text{perímetro}} = \frac{2 \times \text{área de la sección}}{\text{perímetro mojado}} \quad D_{\text{hidráulico}} = 2R_{\text{hidráulico}} = \frac{4S}{\text{perímetro}} \quad (5-11)$$

en vez del radio o el diámetro, y se trata la canalización como si fuera de sección circular, con el número de Reynolds calculado en función del diámetro hidráulico.

Régimen laminar.

Para tuberías de sección circular uniforme por las que circula un fluido newtoniano en régimen laminar, esta pérdida de carga que aparece tanto en tuberías lisas como rugosas puede deducirse de la fórmula de Poiseuille. A partir de la expresión para el caudal (5-5) y teniendo en cuenta que el diámetro es dos veces el radio, se tiene que

$$\Delta h_{\text{lineal}} = \frac{8\mu L Q}{\rho g \pi R^4} = \frac{8\mu L \bar{v}}{\rho g R^2} = \frac{32\mu L \bar{v}}{\rho g D^2} = \frac{32\nu L \bar{v}}{g D^2} \quad (5-12)$$

Si tenemos en cuenta la definición del número de Reynolds, $Re = \bar{v}D/\nu$, esta expresión queda como

$$\Delta h_{\text{lineal}} = \frac{32\nu L \bar{v}}{g D^2} = \frac{64}{Re} \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2g} = f \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2g} \quad (5-13)$$

donde $f = 64/Re$ es el coeficiente de fricción (adimensional), L es la longitud, D el diámetro y $\frac{\bar{v}^2}{2g}$ la altura de velocidad. Esta expresión coincide con la ley empírica (5-10) de Darcy-Weisbach

$$\Delta h = f \frac{L}{D} \frac{\bar{v}^2}{2g} \quad (5-10)$$

que se utiliza para un flujo general, tomando para el caso particular del flujo laminar, la relación $f = 64/Re$, conocida también como *ecuación de Hagen-Poiseuille*.

Estas relaciones permiten obtener la tensión cortante en la pared de la tubería circular para un flujo laminar. De las expresiones anteriores (5-2), se tiene

$$\tau_0 = \Delta h_{\text{lineal}} \frac{\gamma R}{2L} = \Delta h_{\text{lineal}} \frac{\gamma R}{2L}$$

Al despejar Δh_{lineal} se obtiene

$$\Delta h_{\text{lineal}} = \frac{2\tau_0 L}{\gamma R} = \frac{4\tau_0 L}{\gamma D}$$

que, al comparar con la ecuación de Darcy-Weisbach da la tensión en las paredes de la tubería

$$\tau_0 = f \frac{\gamma \bar{v}^2}{8g} = f \frac{\rho \bar{v}^2}{8} \quad (5-14)$$

[†] Por tanto, la relación (5-10) no es estrictamente una relación de proporcionalidad, aunque eso no le quita utilidad, ya que permite “esconder” buena parte de la complejidad real dentro del coeficiente de fricción f .

Cuando las canalizaciones no son cilíndricas la relación entre el número de Reynolds y el coeficiente de fricción es, para régimen laminar y fluido newtoniano, de la forma

$$f = \frac{k}{Re} \quad \text{con } 48 \leq k \leq 96 \quad (5-15)$$

en función de un factor geométrico k . Algunos valores típicos del factor geométrico k son los siguientes

Cuadrado	56,91
Rectángulo 2:1	62,19
Rectángulo 5:1	76,28
Láminas paralelas	76,28

Régimen turbulento

La ley experimental de Darcy-Weisbach es válida para todo tipo de flujo con el coeficiente de fricción adecuado. Como acabamos de ver, para un fluido newtoniano en régimen laminar y tuberías circulares, el coeficiente de fricción viene dado por $f = 64/Re$.

Tuberías lisas. En régimen turbulento ($Re > 2300$) y tuberías lisas se utilizan diversas expresiones $f(Re)$ dependiendo del rango del número de Reynolds. Para números de Reynolds en el rango ($3000 < Re < 100000$) se utiliza la *fórmula de Blasius*

$$f = 0,316/Re^{0,25} \quad (5-16)$$

mientras que para números de Reynolds superiores a éstos, pero menores que 3×10^6 se utiliza la *fórmula de von Karman*

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0,869 \ln(Re\sqrt{f}) - 0,8 = 2 \log(Re\sqrt{f}) - 0,8 \quad (5-17)$$

que es una ecuación implícita.

Tuberías rugosas En régimen turbulento y tuberías rugosas se utilizan distintas funciones del tipo $f = f(\epsilon/D, Re)$ donde ϵ es el coeficiente de rugosidad y d el diámetro de la conducción.

Para régimen turbulento en tuberías circulares la más utilizada de todas es la *fórmula de Colebrook* (1939)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0,869 \ln\left(\frac{\epsilon/D}{3,7} + \frac{2,523}{Re\sqrt{f}}\right) = -2 \log\left(\frac{\epsilon/D}{3,7} + \frac{2,523}{Re\sqrt{f}}\right). \quad (5-18)$$

Al igual que la fórmula de von Karman (5-17) ésta es una ecuación implícita que converge bien en pocas iteraciones cuando se aborda mediante métodos numéricos. El *diagrama de Moody* que se presenta en la figura 5-7 es una representación logarítmica de la ecuación de Colebrook en ejes coeficiente de fricción/número de Reynolds para distintos valores de la rugosidad relativa, combinado con la relación $f = 64/Re$ para flujo laminar.

En el intervalo de rugosidades relativas $10^{-6} \leq \epsilon/D \leq 10^{-2}$ y de números de Reynolds $5000 \leq Re \leq 10^8$ se puede hacer la aproximación explícita

$$f = \frac{1,325}{\left[\ln\left(\frac{\epsilon/D}{3,7} + \frac{5,74}{Re^{0,9}}\right)\right]^2} = \frac{0,25}{\left[\log\left(\frac{\epsilon/D}{3,7} + \frac{5,74}{Re^{0,9}}\right)\right]^2} \quad (5-19)$$

que da valores aproximados de la ecuación de Colebrook en buena parte del rango de interés.

Para rugosidades relativas altas y números de Reynolds altos, f depende fundamentalmente de la rugosidad relativa y poco del número de Reynolds, como se observa en el diagrama de Moody (5-7) y puede ajustarse por

$$1/\sqrt{f} = 1,14 - 0,869 \ln(\epsilon/D) = 1,14 - 2 \log(\epsilon/D). \quad (5-20)$$

saliéndose de la *zona de transición* a la zona tubería completamente rugosa en la que se produce *turbulencia completa*. Cuando la rugosidad relativa es nula la expresión (5-18) se reduce a la fórmula de von Karman (5-17).

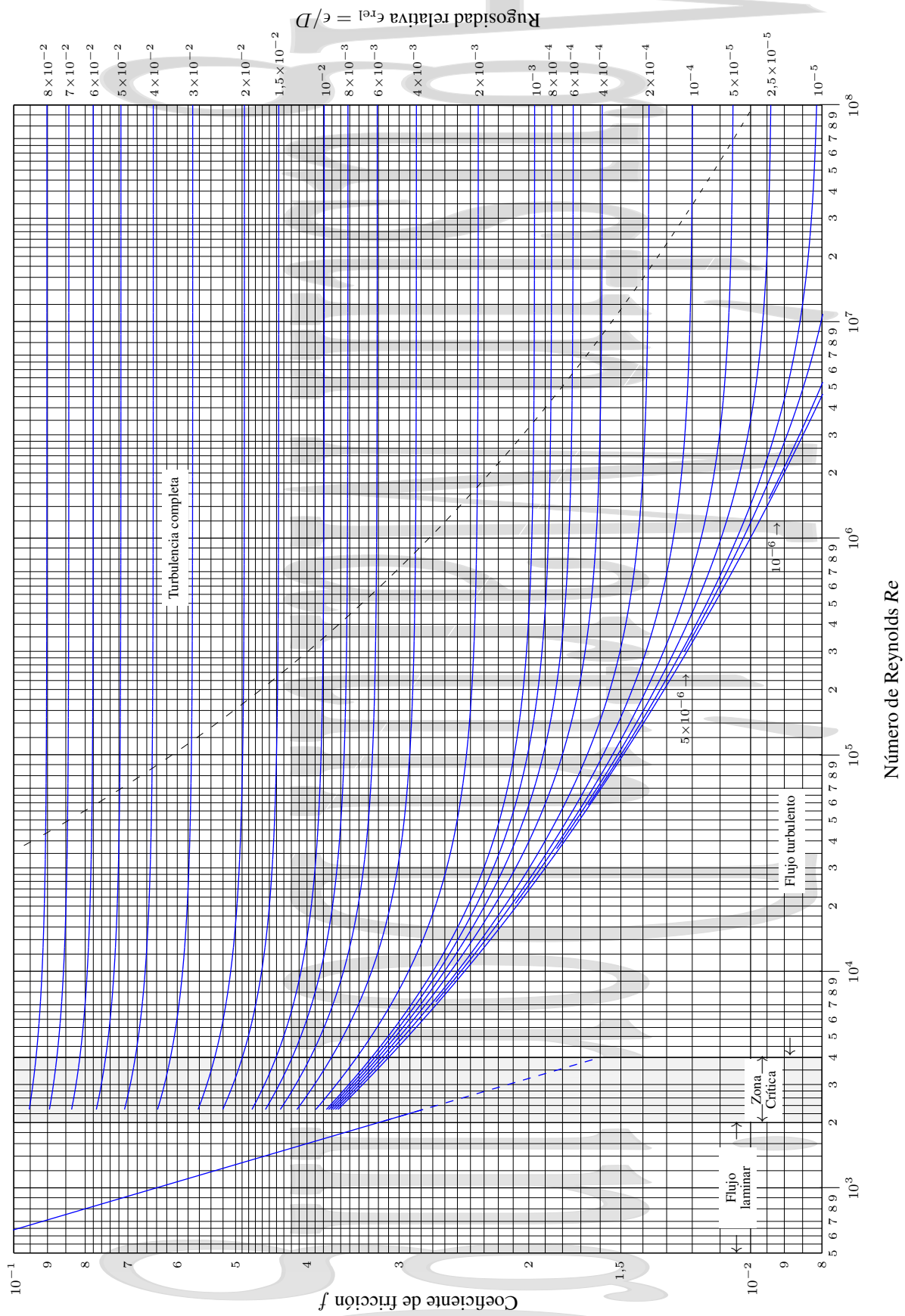
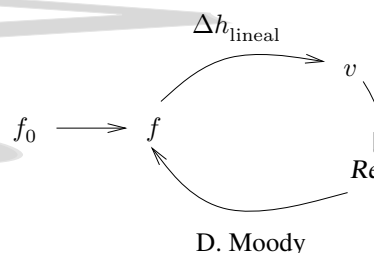


Figura 5-7: Diagrama de Moody para tuberías de sección circular obtenido a partir de la relación $f = 64/Re$ para régimen laminar y la ecuación de Colebrook (5-18). La línea de trazos en la región de flujo turbulento separa la zona de flujo turbulento completamente desarrollado en la que se cumple (5-20) del resto de la región de flujo turbulento.

Cuando se conocen las características del flujo y de la tubería es sencillo obtener el coeficiente de fricción f y la pérdida de carga directamente desde el diagrama de Moody. Cuando la situación es la contraria, es decir se conocen las características de la tubería y de alguna forma la pérdida de carga (p.ej, midiendo las presiones entre dos puntos si se conoce el diámetro de la tubería) y se quiere obtener el caudal, no es posible hacer el proceso inverso salvo que se conozca f para esas características del flujo (f depende tanto de las características de la tubería como de las características del flujo).



Para resolver el problema, se utilizan métodos iterativos. Se parte de un valor de f estimado (p.ej, si no se tiene más información, algo en torno a 0,02 suele ser un valor inicial razonable), se calcula la velocidad a partir de la ecuación de Darcy-Weisbach. De aquí y de las características de la tubería se obtiene el número de Reynolds y con la rugosidad relativa se extrae del diagrama de Moody un nuevo valor del coeficiente de fricción. Repitiendo el proceso hasta que converja suficientemente se tiene un buen valor de f y el caudal como $Q = vS$.

5.3.2. Pérdidas de carga locales o singulares.

Representan disipaciones adicionales de energía en el flujo, normalmente causadas por los flujos secundarios (turbulencias) inducidos en cambios de sección o de dirección de la tubería. Aunque en algunos sistemas constituyen una parte importante de la pérdida de carga total, se les suele denominar pérdidas secundarias o menores. Corresponden a:

- Secciones de rejilla.
- Ensanchamientos.
- Estrechamientos.
- Codos.
- Válvulas.
- Bifurcaciones.

Para obtener las pérdidas de carga locales o singulares, en general se utilizan expresiones experimentales de la forma

$$\Delta h_{\text{local}} = K \frac{v^2}{2g} \quad (5-21)$$

donde K es un coeficiente que normalmente se obtiene de forma empírica (y en algún caso de forma teórica) y que se encuentra en los manuales de hidráulica, y v es alguna de las velocidades en la tubería. En el caso concreto de los ensanchamientos esta expresión se presenta con frecuencia en función de $(\Delta v)^2$ (que en el fondo es similar a 5-21).

No hay que olvidar que, aunque el coeficiente K parece constante, en general tiene alguna dependencia adicional de las condiciones del flujo. En particular, los siguientes factores afectan a K

- La geometría exacta del componente en cuestión, sus características y su unión.
- El número de Reynolds.
- Proximidad a otros elementos, etc... (Los valores tabulados son para componentes “aislados”, con una cierta longitud de tubería entre el elemento analizado y el siguiente).

Por ejemplo, para los ensanchamientos graduales la dependencia de K con las secciones inicial y final del tubo es tal que la pérdida de carga viene dada por[†]

$$\Delta h = K \frac{(\Delta v)^2}{2g} \quad (5-22)$$

donde en K aún queda incluida una dependencia en el ángulo del cono.

A continuación se da un resumen de algunos valores típicos de los coeficientes de pérdidas más habituales. Los valores reales dependen del accesorio en concreto y de la forma de acoplamiento (con bridas, roscado, etc ...) y

[†] Esto no es más que un caso particular de (5-21), ya que por la ecuación de continuidad, $v_1 S_1 = v_2 S_2$ y por tanto,

$$\Delta h = K \frac{(\Delta v)^2}{2g} = K \frac{(v_2 - v_1)^2}{2g} = K \left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right)^2 \frac{v_2^2}{2g} = K \left(\frac{S_1}{S_2} - 1\right)^2 \frac{v_1^2}{2g} = K_{\text{tot}} \frac{v_1^2}{2g}$$

de otros elementos, por lo que los valores que se dan a continuación deben tomarse como valores orientativos y no como valores genéricos aplicables a ciegas en todos los casos. En todas las expresiones que siguen se ha utilizado el subíndice 1 para representar los valores aguas arriba y 2 para representar la situación aguas abajo. Para enfatizar a que parte corresponden las velocidades se ha intentado utilizar las mayúsculas para los valores correspondientes a la sección mayor y las minúsculas para los valores correspondientes a la sección menor.

1. De depósito a tubería (pérdida a la entrada)

Conexión a ras de la pared

tubería entrante

conexión abocinada

$$0,50 \frac{v_2^2}{2g}$$

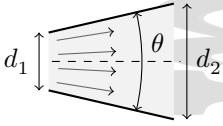
$$1,00 \frac{v_2^2}{2g}$$

$$0,05 \frac{v_2^2}{2g}$$

2. De tubería a depósito (pérdida a la salida) $1,00 \frac{v_1^2}{2g}$

3. Ensanchamiento brusco $\frac{(v_1 - V_2)^2}{2g} = \left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right)^2 \frac{V_2^2}{2g} = \left(\frac{S_2}{S_1} - 1\right)^2 \frac{v_1^2}{2g}$

4. Ensanchamiento gradual $K \frac{(v_1 - V_2)^2}{2g} = K \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g} = K_{\text{tot}} \frac{v_1^2}{2g}$

$K_{\text{tot}} = K \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2$		d_2/d_1							
ángulo [†] del cono θ		1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0	> 5,0
	4°	0,02	0,03	0,03	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04
	10°	0,04	0,06	0,07	0,07	0,07	0,08	0,08	0,08
	15°	0,09	0,12	0,14	0,15	0,16	0,16	0,16	0,16
	20°	0,16	0,23	0,26	0,28	0,29	0,30	0,31	0,31
	30°	0,25	0,36	0,42	0,44	0,46	0,48	0,48	0,49
	50°	0,35	0,50	0,57	0,61	0,63	0,65	0,66	0,67
	60°	0,37	0,53	0,61	0,65	0,68	0,70	0,71	0,72

[†] Ángulo total θ , el ángulo del cono dado aquí es el doble del ángulo entre el eje del cono y su lado.

5. Venturímetros, boquillas y orificios $\left(\frac{1}{c_r} - 1\right) \frac{v_2^2}{2g}$

6. Contracción brusca $K \frac{v_2^2}{2g}$

S_1/S_2	1,44	1,96	2,56	3,24	4	6,25	9	16	25
D_1/d_2	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0
K	0,08	0,17	0,26	0,34	0,37	0,41	0,43	0,45	0,46

7. Codos, accesorios, válvulas $K \frac{v^2}{2g}$

codo a 45°	0,35 – 0,45
codo a 90°	0,50 – 0,75
bifurcaciones en T	1,50 – 2,00
válvulas de compuerta (abierta)	$\simeq 0,25$
válvulas de control (abierta)...	$\simeq 3,0$

8. Salida de tubería a la atmósfera (desagüe libre a la atmósfera).

La pérdida en el desagüe libre de una tubería a la atmósfera es generalmente muy pequeña al no producirse apenas turbulencias en la tubería en ese proceso.

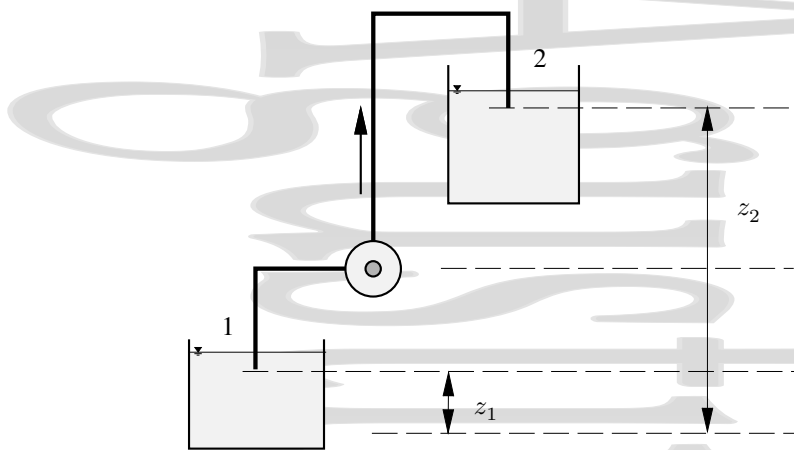


Figura 5-8: En el flujo pueden actuar máquinas como bombas o turbinas. La presencia de éstas también cambiará la energía por unidad de peso del fluido junto con las pérdidas de carga lineales y singulares. Para considerar correctamente los signos de las contribuciones de las distintas pérdidas de carga y alturas de bombas y turbinas, es conveniente seguir el sentido del flujo.

Longitud equivalente de un accesorio.

En ocasiones se representan las pérdidas de carga singulares o locales en los accesorios que aparecen en una tubería recta de sección fija en forma de una *longitud equivalente* L_{eq} , es decir, mediante una estimación de cuántos metros de tubería del mismo diámetro serían necesarios para que se produzca la misma pérdida de carga. Para ello, a partir de las expresiones (5-10) y (5-21) se tiene, para la longitud equivalente

$$K \frac{v^2}{2g} = f \frac{L_{eq}}{D} \frac{v^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad L_{eq} = \frac{KD}{f}. \quad (5-23)$$

Si se tienen distintos accesorios, cada uno de ellos de longitud equivalente L_{eq_i} , la longitud equivalente total será la suma de sus longitudes equivalentes,

$$L_{tot} = \sum_i L_{eq_i}.$$

Obviamente, no tiene sentido utilizar las longitudes equivalentes cuando se tienen tramos rectos de tubería de distintas secciones, como ocurre cuando se trata de un ensanchamiento o un estrechamiento.

5.4. La ecuación de Bernoulli generalizada.

Hemos visto ya todas las contribuciones que pueden cambiar la energía por unidad de peso de un fluido en movimiento (altura de carga total o carga hidráulica). La presencia de bombas a lo largo del flujo aumenta la energía mientras que la presencia de turbinas (véase la sección 5.2 para ambas) o las distintas pérdidas de carga, tanto lineales como singulares, hacen que la energía disminuya. El balance energético completo del flujo entre dos puntos del mismo debe tener en cuenta todas estas contribuciones, llegándose a la *ecuación de Bernoulli generalizada*

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \sum_i |H_{B_i}| - \sum_i |H_{T_i}| - |\Delta h^{tot}| = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2. \quad (5-24)$$

Para considerar correctamente los signos de las alturas de bombas y turbina, es conveniente seguir el sentido del flujo, añadiendo a la altura total inicial todas las alturas aportadas por bombas y restándole todas las alturas de pérdidas y todas las alturas extraídas por turbinas.

Nótese que en realidad ni las bombas ni las turbinas tienen un rendimiento del 100 %, las potencias que se dan son las que se aportan o extraen del flujo, no las consumidas por la bomba o aportadas por la turbina al exterior.

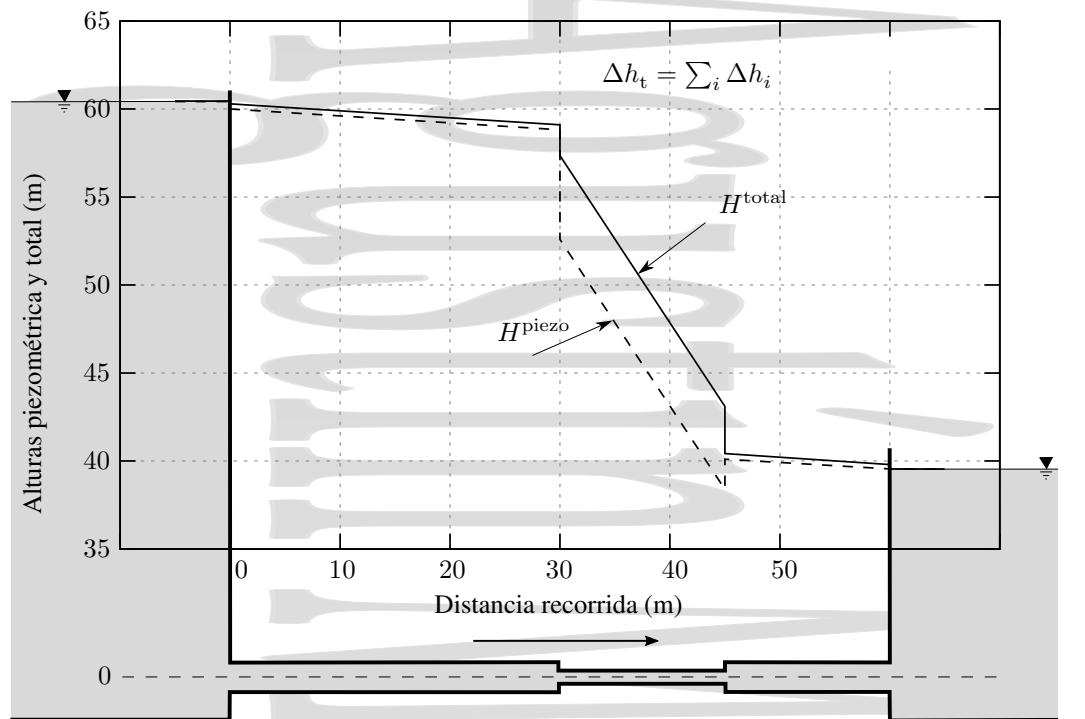


Figura 5-9: Ejemplo de línea de alturas totales y línea de alturas piezométricas en un flujo entre dos depósitos a través de una tubería con un estrechamiento y un ensanchamiento. En la salida del primer depósito y en la entrada del segundo se produce un cambio brusco en la altura total debido a las pérdidas de carga singulares, al igual que en el estrechamiento y en el ensanchamiento. La presencia de bombas o turbinas produciría un salto brusco en la línea de altura total en uno u otro sentido.

5.4.1. Representación gráfica de la pérdida de carga.

En los problemas de Hidráulica aplicada a la Ingeniería Civil es frecuente representar gráficamente la variación de la energía del fluido por unidad de peso del mismo a lo largo del flujo en una tubería. Esta es una representación visual muy útil que da una visión general de los cambios de energía que tienen lugar a lo largo del flujo. Las líneas que se suelen representar en dichos gráficos son la *línea de alturas totales* (también denominada *línea de energías* o *línea de nivel energético*) y la *línea de alturas piezométricas* (también conocida como *línea piezométrica* o *línea de altura motriz*).

Para representar estas líneas, entre los puntos inicial y final del flujo,

- El valor de la línea de altura total en cada punto es el resultado de restar a la altura total correspondiente al depósito inicial (nivel de energía del depósito) todas las pérdidas de carga encontradas en el camino (en este caso todas las pérdidas de carga a la izquierda del punto considerado), incluyendo la carga hidráulica de las posibles turbinas y sumar todas las ganancias añadidas por las posibles bombas. En Hidráulica, la presión utilizada al representar la línea de alturas totales es la presión manométrica, salvo en contadas ocasiones.

Si no hay aportes de energía mediante bombas esta línea siempre decrece a lo largo del flujo. En un tramo de tubería de sección constante por el que transcurre un flujo incompresible esta línea decrece de forma lineal con la distancia L de acuerdo con la ley de Darcy-Weisbach (5-10) al no cambiar ni el diámetro D ni la velocidad media v . Si la sección no es constante la variación de esta línea con la distancia recorrida tiene una forma más compleja. Por otra parte, en las singularidades o en bombas o turbinas esta línea variará de forma brusca.

- La línea de altura piezométrica se obtiene en cada punto de la tubería restando el valor de la altura de velocidad $v^2/(2g)$ del valor de la altura total. En un tramo de tubería de sección constante con un flujo incompresible a su través $v^2/(2g)$ no cambia y por tanto, en dicho tramo la línea de alturas piezométricas es paralela a la línea de alturas totales. Recuérdese que, al igual que con la línea de altura total, la presión utilizada al representar la línea de alturas totales es, generalmente, la presión manométrica.

Recuérdese que esta línea es la línea imaginaria que resultaría al unir las alturas a las que el líquido ascendería en cada punto si se insertara en el mismo un piezómetro (tubo vertical abierto a la atmósfera), pero sólo con la presión medida en presiones manométricas, como es habitual en Hidráulica.

Al contrario que la línea de alturas totales, que siempre decrece a lo largo del flujo si no hay bombas, la línea de altura piezométrica puede aumentar si la altura de velocidad decrece bruscamente (como ocurre en un ensanchamiento).

En la figura 5-9 se muestra un ejemplo de líneas de altura piezométrica y total en una tubería que une dos depósitos y contiene un estrechamiento y un ensanchamiento.

5.5. Redes de tuberías.

Analizaremos ahora algunos ejemplos sencillos de redes de tuberías y los elementos fundamentales a tener en cuenta para su cálculo.

El caso más sencillo es el de tuberías en serie. En este caso, en régimen permanente el caudal másico Q_m que circula a través de cada tubería es el mismo, $Q_{m_1} = Q_{m_2} = \dots = Q_{m_n}$, mientras que la pérdida de carga total a lo largo del sistema de tuberías en serie se obtiene como la suma de las pérdidas de carga en cada uno de los tramos (más las pérdidas en los elementos de unión de las tuberías),

$$\Delta h^{\text{tot}} = \sum_i \Delta h_i$$

En las tuberías en paralelo, la corriente que originalmente circulaba por una tubería se distribuye en un conjunto de tuberías para posteriormente reunirse de nuevo en una sola. En este caso el caudal en la línea principal es la suma de los caudales en las tuberías en que se divide, $Q_{\text{principal}} = Q_{m_1} + \dots + Q_{m_n}$. Como los valores de la altura de carga en los puntos de bifurcación deben ser los mismos para todas las tuberías colocadas en paralelo, las pérdidas de carga en todas ellas deben ser iguales.

Cuando tenemos redes de tuberías más complejas hay dos reglas fundamentales que deben tenerse en cuenta:

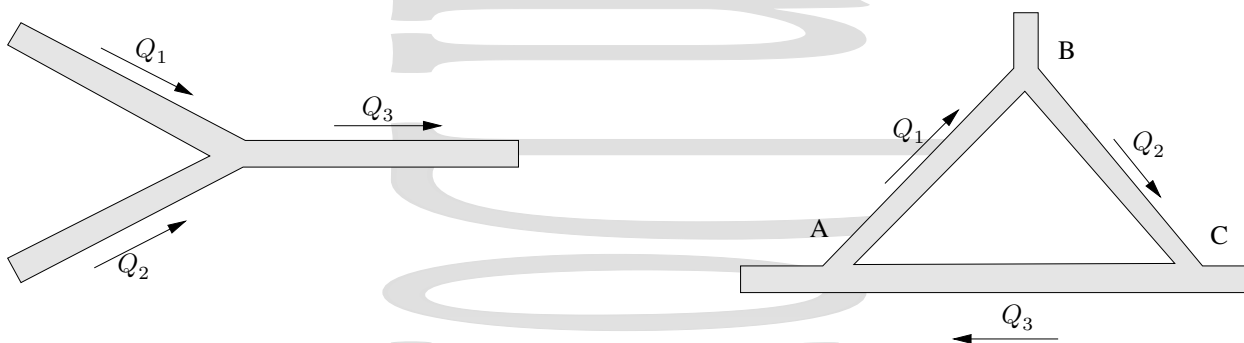


Figura 5-10: Reglas fundamentales para trabajar con redes de tuberías

1. En cualquier nodo (unión de dos o más tuberías) debe conservarse la masa. Es decir, el caudal másico neto debe ser cero en régimen estacionario, todo lo que entra en un intervalo de tiempo debe salir en el mismo intervalo, no puede producirse acumulación de materia. Para el caso de un fluido incompresible, esto es cierto también para el caudal.

$$\sum_i Q_{m_i} = 0$$

2. No debe haber pérdida de carga neta a lo largo de un bucle. Si comenzamos en una posición del bucle y sumamos las variaciones de carga hidráulica, cada una con su correspondiente signo, al llegar a la posición

original la carga hidráulica debe ser la misma que al principio,

$$\sum_i \Delta h_{\text{roz}_i} + \sum \Delta H_{\text{bombas}} + \sum \Delta H_{\text{turbinas}} = 0$$

en el bucle.

5.6. Cavitación.

Se denomina *cavitación* a la formación de cavidades en el líquido en movimiento llenas de vapor. Se produce cuando la presión en algún lugar del fluido se hace menor que la presión de vapor saturante del líquido, es decir la presión que corresponde a la ebullición del líquido a una temperatura dada.

Por ejemplo, acelerando agua desde el reposo hasta velocidades de 15 m/s la presión desciende en aproximadamente una atmósfera y produciéndose cavitación. De hecho esto ocurre a menudo en los elementos en los que se producen pérdidas locales cuando se produce un gran aumento de velocidad al estrecharse el flujo después de dilatarse.

Así, en las partes de baja presión puede comenzar una intensa evaporación de líquido, formándose las cavidades de cavitación formadas por burbujas de vapor. Al aumentar posteriormente la presión el vapor se condensa, normalmente con un brusco chasquido y las cavidades de cavitación desaparecen.

La cavitación va acompañada de un notable aumento de las pérdidas locales y se caracteriza a través un parámetro adimensional denominado *número de cavitación*

$$Ca = \frac{2(p - p_v)}{\rho v^2} \quad (5-25)$$

donde p y v son la presión y la velocidad antes de la resistencia local y p_v es la presión de vapor saturante del agua.

Para que en el elemento local no se produzca cavitación el número de cavitación debe ser menor que un valor crítico que se determina de forma experimental, $Ca < Ca_{\text{crítico}}$.

También se produce cavitación en hélices, bombas y turbinas. La cavitación produce grandes oscilaciones, con aumento de las pérdidas de carga y además ayuda a la corrosión de los metales. Esto último es consecuencia de los procesos casi instantáneos de contracción de las burbujas que producen grandes presiones que inicialmente desmigajan lentamente el material y posteriormente extienden su efecto al interior del mismo, combinados a menudo con efectos químicos. Como consecuencia de todo esto el metal se corroe y llega a adquirir una estructura esponjosa.

5.7. Golpe de ariete o choque hidráulico.

Se denomina *golpe de ariete* o *choque hidráulico* al brusco aumento de la presión que se produce en las tuberías cuando se detiene bruscamente el líquido que circula por ellas. Esto ocurre, por ejemplo, cuando se cierran rápidamente alguno de los distintos dispositivos (válvulas, grifos) presentes en la tubería o cuando se produce una parada imprevista de las bombas que impulsan el líquido.

El golpe de ariete es especialmente peligroso en las tuberías largas por las que circulan grandes cantidades de líquido a altas velocidades. En estos casos, el golpe de ariete puede producir graves daños en las juntas de unión, en la propia tubería o en las máquinas.

Para estudiar este fenómeno consideremos una tubería horizontal de sección circular constante S y radio R por la que circula un líquido de velocidad v constante. Si se cierra la válvula de forma idealmente instantánea la capa de líquido en contacto con esta se detendrá de forma inmediata produciéndose un aumento de la presión como consecuencia de la transformación de energía cinética en energía potencial de presión.

Consideremos primero un caso extremo, el caso de un fluido completamente incompresible que circula por una tubería totalmente rígida. En este caso, si la válvula se cierra en un tiempo Δt todo el fluido se detiene simultáneamente en ese tiempo la bajo la acción de la fuerza $\Delta p \pi R^2$ en la superficie en contacto con la válvula y la cantidad de

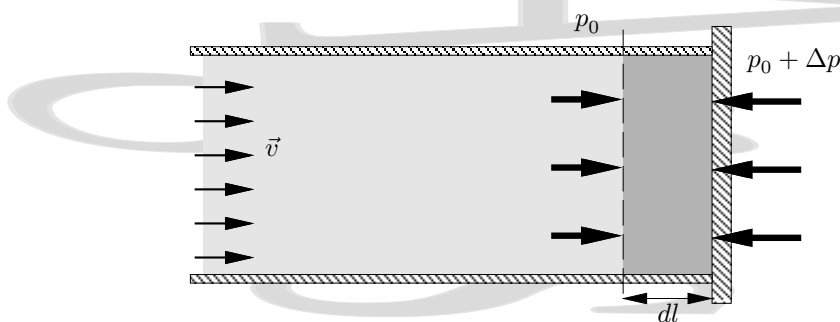


Figura 5-11: Golpe de ariete. El líquido que circula por la tubería se detiene súbitamente.

movimiento de éste cambia de $\rho L \pi R^2 v$ a 0 en el intervalo Δt . El impulso de la fuerza mencionada debe ser igual a la variación de la cantidad de movimiento del líquido,

$$\Delta p \pi R^2 \Delta t = \rho L \pi R^2 v$$

Esta ecuación da una buena estimación del aumento de presión asociado al cierre lento de una válvula. Sin embargo da un resultado pequeño y no demasiado interesante. También hay que recalcar que da como resultado una presión infinita si el cierre de la válvula se produce de forma instantánea, pero para presiones muy altas las aproximaciones de líquido totalmente incompresible y tubería totalmente rígida son malas.

Cuando la válvula se cierra de forma instantánea el fluido se frenará rápidamente y la presión aumentará, pero este aumento de presión producirá una pequeña compresión en el fluido y una pequeña expansión de la tubería (que esperamos elástica). Así, el líquido en contacto con la válvula se detendrá instantáneamente, pero al ser éste compresible, el resto del líquido en la tubería no se detendrá de forma instantánea. El límite del volumen que incluye el líquido parado se desplaza alejándose de la válvula con una cierta velocidad c a la que denominamos velocidad de propagación de la onda de presión.

Examinemos el elemento de volumen del líquido $S c dt = S dl$ junto a la válvula. En un tiempo dt este volumen se ha detenido y su cantidad de movimiento ha pasado de $\rho S dl v$ a 0. El impulso de la fuerza que actúa en el tiempo dt deteniendo el fluido es $\Delta p S dt$. Al igualarlo a la variación de la cantidad de movimiento del elemento en ese tiempo dt tenemos

$$\Delta p S dt = \rho S dl v$$

Como $c = dl/dt$ se obtiene el valor del aumento de presión en el golpe de ariete:

$$\Delta p = \rho c v \quad (5-26)$$

Después se detiene la siguiente capa y así sucesivamente, y la presión elevada que inicialmente surge en las proximidades de la válvula se propaga poco a poco por toda la tubería con una velocidad c , en contra del flujo original del líquido.

Si la presión al principio de la tubería no cambia (por ejemplo, cuando el líquido viene de un depósito abierto a la atmósfera) una vez que la onda de presión alcanza la sección inicial de la tubería, ésta comienza a propagarse en el sentido contrario con la misma velocidad c , ahora como onda de disminución de presión. Cuando esta onda alcanza la válvula la presión cae y se hace menor que antes del cierre y de nuevo una onda de presión sale en sentido contrario. Así, se alternan ciclos de aumento y disminución de la presión en intervalos de tiempo iguales al tiempo empleado por la onda en recorrer completamente en los dos sentidos el tramo de tubería entre la válvula y el principio.

Así, el líquido realiza un movimiento oscilatorio que se va amortiguando como consecuencia de la disipación de energía que tiene lugar en el proceso.

La velocidad de propagación de la onda de presión depende de las características del líquido y de la tubería y viene

dada por la expresión:[†]

$$c = \sqrt{\frac{\mathcal{K}}{\rho}} \left(\sqrt{1 + \frac{\mathcal{K}D}{E\Delta R}} \right)^{-1} \quad (5-27)$$

donde \mathcal{K} es el módulo de compresibilidad del líquido (inversa del coeficiente de compresibilidad), ρ la densidad del líquido, E el módulo de Young del material de la tubería, D el diámetro de la misma y ΔR el espesor de la pared de la tubería.

Si se considera totalmente la tubería totalmente rígida ($E = \infty$) la velocidad de propagación de la onda de presión queda en la forma

$$c = \sqrt{\frac{\mathcal{K}}{\rho}}, \quad (5-28)$$

igual a la velocidad de propagación del sonido en un líquido.

Para evitar los efectos del golpe de ariete se utilizan diversos sistemas:

1. Dispositivos que aumentan el tiempo de cierre de todo tipo de válvulas aminorando así el efecto.
2. Uso de un diámetro grande en la tubería para que las velocidades sean bajas.
3. Dispositivos de seguridad en las bombas para que en caso de corte de energía reduzca lentamente la velocidad del motor.
4. Colocación de válvulas de seguridad automáticas, campanas de aire y chimeneas de gran sección.

[†] que se obtiene de la condición de igualdad entre la energía cinética del líquido que se mueve por la tubería y la suma de los trabajos de compresión del líquido y alargamiento del tubo.

Augustin Martin Jourdain

Capítulo 6

Mecánica de fluidos en medios permeables.

Índice del capítulo

6.1. Fenómenos de superficie: tensión superficial y capilaridad	75
6.1.1. Tensión superficial.	75
6.1.2. Ángulo de contacto	79
6.1.3. Capilaridad	81
6.2. Flujo en medios permeables.	82
6.2.1. El permeámetro. La ley de Darcy macroscópica en una dimensión.	84
6.2.2. Velocidad de descarga y velocidad microscópica promedio.	85
6.2.3. La ecuación de Bernoulli con permeación.	89
6.2.4. Potencial hidráulico y sus componentes. El campo hidráulico.	90
6.2.5. La ley de Darcy microscópica en una dimensión.	90
6.2.6. La ley de Darcy microscópica en tres dimensiones.	91
6.2.7. Flujo a través de terrenos saturados homogéneos e isótropos.	92
6.2.8. La ecuación de Laplace y su resolución.	92
6.2.9. Flujo permeable a través de medios anisótropos	96
6.2.10. La red de flujo.	99
6.2.11. Ejemplos de redes de flujo en distintos sistemas	99
6.2.12. Subpresiones	101

6.1. Fenómenos de superficie: tensión superficial y capilaridad.

6.1.1. Tensión superficial.

Las superficies libres de los líquidos presentan una serie de fenómenos cuyo origen está asociado a la tendencia de la superficie a permanecer lo más pequeña posible. Este hecho, conectado con la presencia de una tensión en la película superficial de forma análoga a la tensión en una membrana elástica fina que se encuentra tensa puede observarse de forma sorprendente mediante una serie de experimentos simples.

Algunos ejemplos de tensión superficial.

Consideremos un bastidor como el de la figura 6-1, que se sumerge en una solución jabonosa, quedando al sacarlo una fina película de la misma. Si sobre esta película depositamos un hilo cerrado en un lazo, se observa que éste no adopta una posición especial, sino la posición que haya tomado al caer. Sin embargo, si se pincha la parte de la película dentro del hilo, éste adopta la forma de una circunferencia por la acción de la tensión superficial. De esta forma, la película de fluido ha alcanzado su mínima superficie.

Otro efecto de la tensión superficial es el hecho de que un líquido que no se encuentre sometido a fuerzas externas tiende a tener una forma esférica, minimizando de esta forma su superficie para un volumen dado. Esto tiene como consecuencia que las presiones en el equilibrio a los dos lados de la superficie no serán iguales (véase la sección 6.1.1).

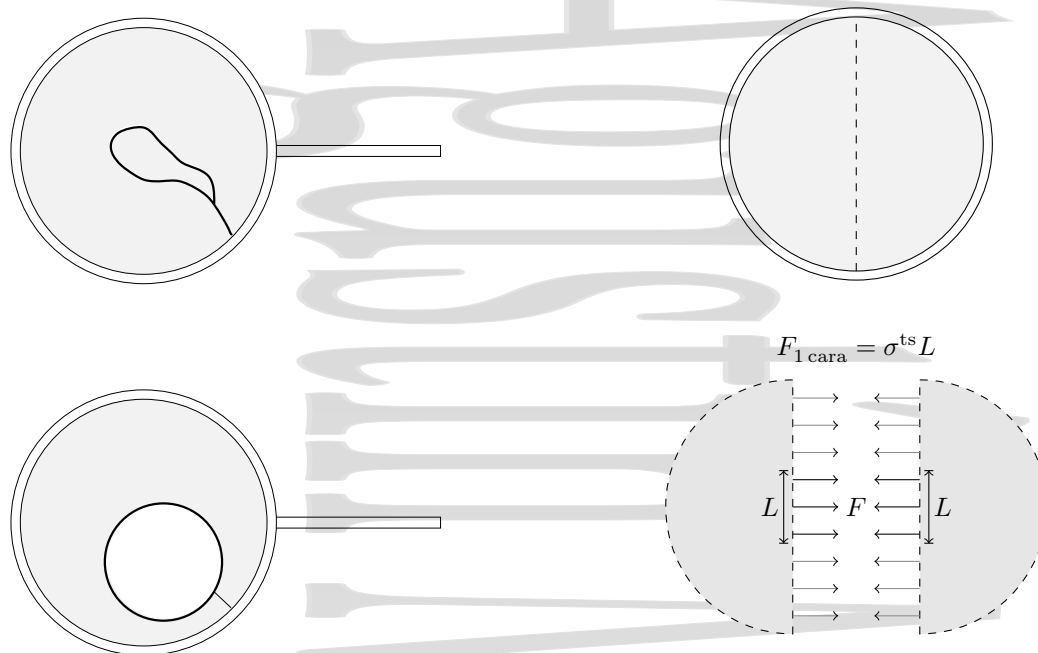


Figura 6-1: Efecto de la tensión superficial en una película delgada. Al depositar en la misma un hilo cerrado, ésta queda con la forma con la que cae. Sin embargo, si se pincha la película dentro del hilo, el hilo toma forma circular cuando la película intenta disminuir su superficie.

Figura 6-2: El coeficiente de tensión superficial σ^{ts} representa la fuerza por unidad de longitud a través de una superficie en la actúa la tensión superficial. Obsérvese que en el caso de la figura la película jabonosa tiene dos superficies a través de las que actúa la tensión superficial, una a cada lado de la película en contacto con el aire.

Otro efecto de la tensión superficial es el siguiente: ¿Qué ocurre cuando un objeto de mayor densidad que el agua se deposita sobre la misma? La respuesta más inmediata sería que éste se hundiría. Sin embargo, esto no siempre es así. Consideremos el caso de una aguja que se coloca sobre la superficie libre del agua. Si ésta se deposita con el suficiente cuidado se observa que es posible hacerla flotar sobre la superficie del líquido. Esto es debido a que las fuerzas que soportan la aguja son debidas no sólo al empuje del agua sobre la misma, que es obviamente menor que su peso, sino también a la tensión superficial.

La tensión superficial es utilizada por algunos insectos como el *zapatero* (*gerris lacustris*) que se muestra en la figura 6-3. Éste se mantiene muy por encima del agua gracias a la tensión superficial en sus patas, que utiliza para remar (las centrales) o a modo de timón (las posteriores), mientras que caza a sus presas con las delanteras, pero todas ellas contribuyen a que se mantenga por encima del agua. Obsérvese la curvatura de la superficie del agua bajo las patas, similar a la que aparece en el ejemplo que acabamos de ver en el que se deposita suavemente una aguja sobre el agua.

Principios físicos de la tensión superficial.

Cualitativamente esto tiene su origen en la fuerza de atracción molecular no compensada en las moléculas de la superficie. Mientras que en el interior de un líquido, cada molécula está rodeada de otras moléculas por todos lados, y por tanto las fuerzas intermoleculares se compensan unas a otras, en la superficie no hay moléculas por encima de las moléculas superficiales. Así, las moléculas de la superficie experimentan una fuerza neta dirigida hacia el interior de modo que éstas no escapan, intentando la superficie hacerse lo menor posible. Asimismo, si se eleva ligeramente una molécula superficial, los enlaces moleculares con las moléculas adyacentes se alargan, produciéndose una fuerza restauradora que tira de la molécula desplazada de nuevo hacia la superficie.

Esto es lo que ocurre cuando se coloca cuidadosamente una aguja sobre la superficie o en las patas de los “guerridae” sobre la superficie del agua. Las moléculas superficiales descienden ligeramente, separándose de las demás moléculas de la superficie, que ejercen una fuerza atractiva sobre las mismas, soportando la aguja. Así, la superficie de un líquido presenta una cierta semejanza con un membrana elástica tensa.

Tabla 6-1: Valores de la tensión superficial medidos en dy/cm ($1 \text{ dy/cm} = 10^{-3} \text{ N/m}$). En todos los casos se asume que el líquido está en contacto con aire. Salvo indicación en sentido contrario, los datos están tomados a 20°C .

Sustancia	Tensión superficial	Sustancia	Tensión superficial
Acetona	23,7	Agua a 5°C	74,92
Metanol	22,6	Agua a 10°C	74,22
Etanol	22,3	Agua a 15°C	73,49
Aceite de oliva	33	Agua a 20°C	72,75
Aceite de parafina	26	Agua a 25°C	71,97
Benceno	28,9	Agua a 30°C	71,18
Glicerina	64	Mercurio	475

Este concepto de tensión en la superficie de un fluido, conocido como *tensión superficial* fue introducido por J. A. von Segner como la fuerza que actúa en la superficie de un fluido a cada lado de una línea de longitud unidad dibujada en la superficie (véase la figura 6-2).

La fuerza necesaria para romper la superficie se puede medir levantando un alambre fino. La fuerza necesaria para romper la superficie resulta ser proporcional a la longitud de la superficie que se rompe, que es el doble de la longitud del alambre, si hay una película de superficie en ambos lados del mismo, o a la longitud del mismo, si sólo hay película superficial en un lado. Si el alambre posee una masa m y una longitud l y es necesario ejercer una fuerza F para separarlo de la superficie (de dos caras), el coeficiente de tensión superficial σ^{ts} es

$$\sigma^{\text{ts}} = \frac{F - mg}{2l} \quad (6-1)$$

Algunos valores de este coeficiente de tensión superficial se dan en la tabla 6-1.

Relación entre la tensión superficial y la diferencia de presiones a través de una superficie.

Estas no son las únicas consecuencias de la tensión superficial. Hasta el momento se ha dicho que, una vez alcanzado el estado de equilibrio, las presiones de dos cuerpos en contacto han de ser iguales. Sin embargo, esta afirmación es cierta únicamente cuando el efecto de los fenómenos de superficie es despreciable. Cuando se tiene en cuenta la tensión

**Figura 6-3:** El zapatero se desliza sobre la superficie del agua gracias a la tensión superficial. Fotografía de dominio público de Tim Vickers.

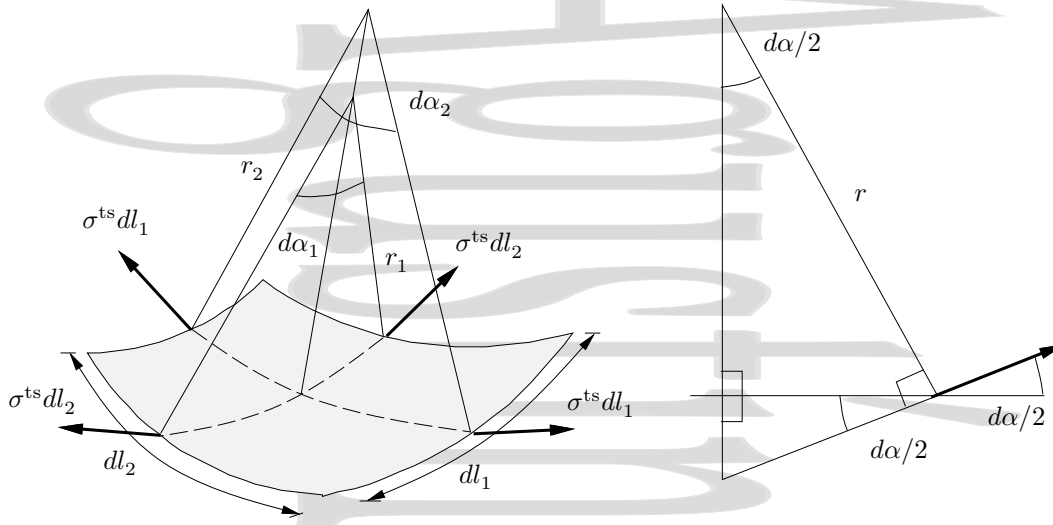


Figura 6-4: Fuerza ejercida por la tensión superficial sobre un elemento infinitesimal rectangular de una superficie curva.

superficial, las presiones de dos medios en contacto pueden ser diferentes.

Como ejemplo de lo que se acaba de afirmar, consideremos el caso de una gota de líquido en el aire. La tendencia de ésta a disminuir su superficie conduce a una compresión de la gota y a un aumento de la presión interna, siendo la presión del líquido en la gota mayor que la del aire circundante. A la diferencia entre ambas presiones se le denomina diferencia, variación de presión o presión diferencial y la designaremos por p_{dif} .

Para calcular esta magnitud, debemos tener en cuenta que el trabajo realizado por las fuerzas superficiales sobre la gota al disminuir la superficie de la misma en un valor dS viene dado por la disminución de la energía superficial $\sigma^{\text{ts}} dS$. Este trabajo lo realizan las moléculas de la superficie sobre el líquido del interior de la gota, y puede expresarse también como el trabajo volumétrico realizado sobre el líquido, en función de la variación de volumen dV de la gota, en la forma $(p_{\text{gota}} - p_{\text{ext}})dV = p_{\text{dif}} dV$. Ambas expresiones se refieren al mismo trabajo, en un caso calculado a partir del cambio de volumen de la gota bajo una diferencia de presiones y en el otro a partir del cambio de superficie que se produce en la gota bajo una tensión superficial, y por tanto son iguales

$$\sigma^{\text{ts}} dS = p_{\text{dif}} dV \quad (6-2)$$

Veamos ahora que ocurre con una gota esférica de radio r , con una superficie $S = 4\pi r^2$ y un volumen $V = 4\pi r^3/3$. Sustituyendo esto en la expresión anterior, se tiene

$$\sigma^{\text{ts}} 8\pi r dr = p_{\text{dif}} 4\pi r^2 dr$$

con lo que tenemos que la presión diferencial en el caso de una gota esférica viene dada por

$$p_{\text{dif}} = \frac{2\sigma^{\text{ts}}}{r} \quad (6-3)$$

Un cálculo análogo puede realizarse para una superficie cilíndrica, como la que aparece cuando entre dos planos verticales próximos hay agua. En este caso, el volumen es $V = \pi r^2 L$ y la superficie $S = 2\pi r L$, con L la altura del cilindro. Así, para el caso de una superficie cilíndrica, la presión diferencial es

$$p_{\text{dif}} = \frac{\sigma^{\text{ts}}}{r} \quad (6-4)$$

Para obtener una relación más general entre la tensión superficial σ^{ts} y la fuerza resultante perpendicular a la superficie consideremos el elemento diferencial de superficie rectangular que se observa en la figura 6-4. Si σ^{ts} es la tensión superficial, r_1 y r_2 los radios de curvatura de la superficie en las direcciones indicadas y dl_1 y dl_2 las longitudes de los “lados” del rectángulo, actuarán unas fuerzas $\sigma^{\text{ts}} dl_1$ y $\sigma^{\text{ts}} dl_2$ en los lados del elemento de superficie. Si $d\alpha_1$ y $d\alpha_2$

son los ángulos subtendidos por los lados dl_1 y dl_2 respectivamente, $d\alpha_1/2$ y $d\alpha_2/2$ serán los ángulos que forman las fuerzas $\sigma^{ts}dl_1$ y $\sigma^{ts}dl_2$ con el plano tangente a la superficie, y se cumplirá que $dl_1 = r_1d\alpha_1$ y $dl_2 = r_2d\alpha_2$. Por tanto, la componente perpendicular de la fuerza de tensión superficial que actúa sobre el lado 1 viene dada por

$$2\sigma^{ts}dl_1 \sin d\alpha_2/2 \simeq 2\sigma^{ts}dl_1 d\alpha_2/2 = \sigma^{ts}dl_1 \frac{dl_2}{r_2} \quad (6-5)$$

y la componente perpendicular de la fuerza que actúa sobre el lado 2 por

$$2\sigma^{ts}dl_2 \sin d\alpha_1/2 \simeq 2\sigma^{ts}dl_2 d\alpha_1/2 = \sigma^{ts}dl_2 \frac{dl_1}{r_1} \quad (6-6)$$

Para que se esté en condiciones de equilibrio mecánico, la suma de estas fuerzas debe ser compensada por una fuerza surgida de la diferencia de presiones entre los dos medios de la forma

$$\Delta F = p_{\text{dif}} dl_1 dl_2 \quad (6-7)$$

Así, en el caso general de una superficie de radios principales de curvatura (mínimo y máximo) r_1 y r_2 , la diferencia de presiones viene dada por la *fórmula de Laplace* (o Laplace-Young)

$$p_{\text{dif}} = \sigma^{ts} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \quad (6-8)$$

La diferencia de presiones entre las dos caras de una superficie líquida es proporcional a la suma de las inversas de los radios de curvatura en dos direcciones mutuamente ortogonales, siendo la presión mayor siempre hacia la parte cóncava de la superficie. Hay que recalcar que la suma $1/r_1 + 1/r_2$ es un invariante respecto de la rotación de coordenadas, de forma que la ecuación (6-8) es independiente de la dirección en la que se toman los ejes, obviamente de acuerdo con el punto de vista físico.

La ecuación (6-8) se puede particularizar fácilmente al caso cilíndrico con $r_1 = \infty$ y al caso esférico con $r_1 = r_2$, ambos ya analizados.

6.1.2. Ángulo de contacto

Se denominan *fuerzas de cohesión* a las fuerzas de atracción entre una molécula del líquido y otras moléculas del mismo. Por otra parte, la fuerza que tiene lugar entre una molécula del líquido y otra sustancia, como la pared de un tubo delgado, es una *fuerza adhesiva*.

Cuando consideramos un líquido que se halla en un recipiente, en cada punto del borde de la superficie de dicho líquido concurren tres medios: (1) *sólido*, que es la pared del recipiente, (2) *líquido*, y (3) *gaseoso*. El ángulo entre la superficie del líquido y la pared sólida se denomina *ángulo de contacto* θ .

Dependiendo de la importancia relativa de las fuerzas adhesivas y cohesivas se tendrá un tipo u otro de ángulo de contacto. Cuando la fuerza adhesiva es menor que la fuerza de cohesión el ángulo se hace grande, mientras que cuando la fuerza de cohesión es menor que la fuerza adhesiva, el ángulo se hace pequeño.

Estudiemos ahora esto en función de las tensiones superficiales implicadas en el problema, apareciendo efectos de tensión superficial en cada una de las superficies de separación entre dos medios.

Así, en la *línea de contacto* están aplicadas tres fuerzas de tensión superficial, estando cada una de ellas dirigida según la tangente hacia el interior de la superficie de contacto de los dos medios correspondientes.

La superficie del líquido adquiere una forma tal que la resultante de las tres fuerzas σ_{SL}^{ts} , σ_{SG}^{ts} y σ_{LG}^{ts} no tenga componente a lo largo de la pared del recipiente (la reacción de la pared elimina la componente perpendicular a la misma), quedando la condición de equilibrio

$$\sigma_{SG}^{ts} = \sigma_{SL}^{ts} + \sigma_{LG}^{ts} \cos \theta$$

donde no se ha incluido la longitud de la línea de contacto, que es la misma en todos los casos. Así, el coseno del ángulo de contacto queda

$$\cos \theta = \frac{\sigma_{SG}^{ts} - \sigma_{SL}^{ts}}{\sigma_{LG}^{ts}} \quad (6-9)$$

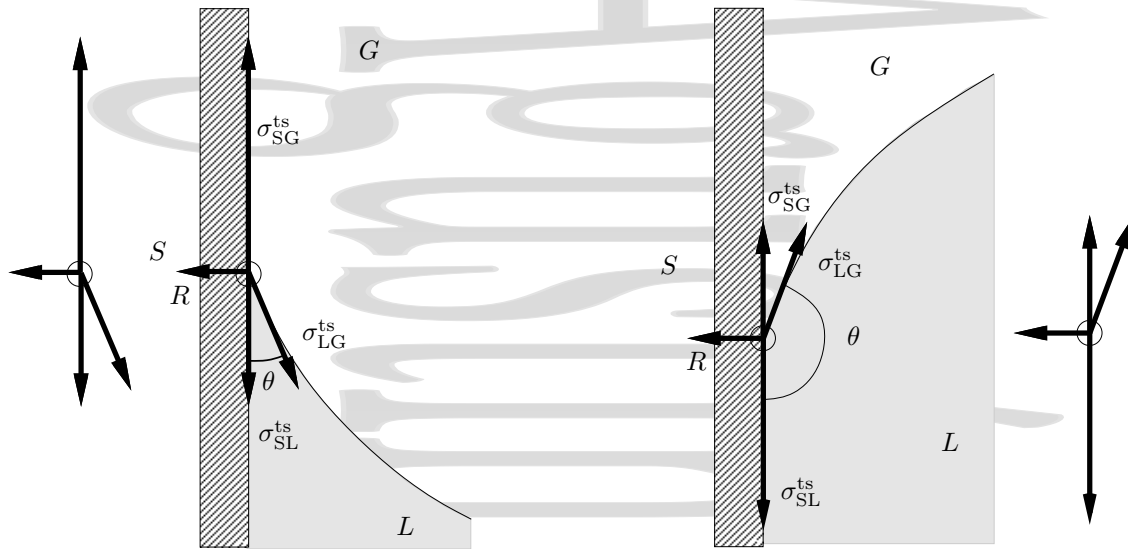


Figura 6-5: Equilibrio de fuerzas por unidad de longitud en un pequeño elemento de volumen anular en torno a la línea de contacto sólido-líquido-gas.

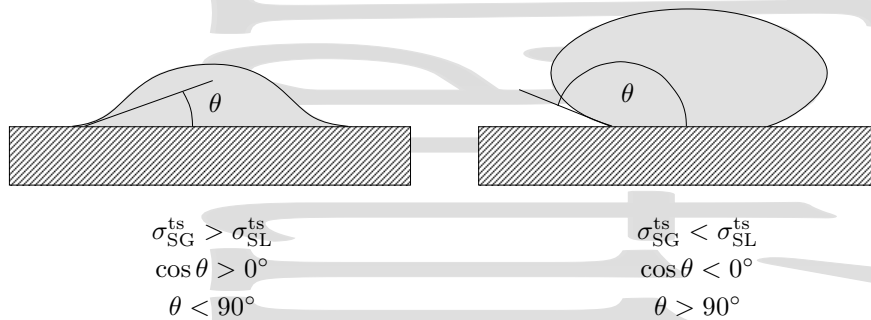


Figura 6-6: Distintos comportamientos de una gota sobre una superficie dependiendo del ángulo de contacto.

Como se ve, el ángulo de contacto depende exclusivamente de la naturaleza de los tres medios en contacto (de las tensiones superficiales en los límites) y no depende ni de la forma del recipiente ni del valor de g . Estas tensiones superficiales y las fuerzas asociadas son muy sensibles al estado de las superficies divisorias y a sus purezas.

Si $\sigma_{SG}^{ts} > \sigma_{SL}^{ts}$, es decir si la tensión superficial sólido-gas es mayor que la tensión superficial sólido-líquido, se tiene que $\cos \theta > 0$ y que $\theta < 90^\circ$. El ángulo es agudo y el menisco tiene la forma cóncava de la parte izquierda de las figuras 6-5 y 6-6. En este caso se dice que el líquido “moja” a la superficie sólida, una gota del líquido depositada sobre la superficie se extiende sobre la misma. Esto es lo que ocurre con el agua sobre vidrio limpio.

Cuando $\sigma_{SG}^{ts} < \sigma_{SL}^{ts}$, la tensión superficial sólido-gas es menor que la tensión superficial sólido-líquido, teniéndose que en este caso $\cos \theta < 0$ y que $\theta > 90^\circ$. Este caso corresponde al menisco convexo, y una gota depositada sobre la superficie se recoge sobre sí misma, como se muestra en la parte derecha de las figuras 6-5 y 6-6. En este caso se dice que el líquido “no moja” la superficie del sólido. Ejemplos de ángulos de este tipo se tienen en los casos de mercurio sobre vidrio (150°) y de agua sobre parafina (105°). Las gotas de estos líquidos se elevan intentando disminuir el área de contacto con la superficie. También aparece este tipo de ángulos para una gota de agua sobre una superficie grasa como una mano sucia. Al añadir jabón cambia la tensión superficial y el ángulo de contacto se hace agudo (o casi nulo) de forma que la gota se extiende sobre la mano para favorecer su limpieza.

Si el ángulo de contacto es 0 o el segundo miembro de la ecuación (6-9) es mayor que la unidad (lo que daría un imposible coseno mayor que 1) el líquido se extiende por toda la superficie sólida y se dice que el líquido “moja completamente” dicha superficie sólida.

6.1.3. Capilaridad

La elevación de un líquido por un tubo delgado, llamado tubo capilar, es otro fenómeno de superficie íntimamente ligado con la tensión superficial. En este proceso aparecen fuerzas tanto de cohesión como de adhesión. Si sumergimos un tubo delgado de vidrio en agua, hemos visto que, ya que el agua moja bastante bien al vidrio, tendremos un ángulo de contacto muy agudo, de forma que la superficie estará muy curvada si el tubo es lo suficientemente delgado. El resultado de todo esto es que se producirá una fuerza ascendente, subiendo el agua por el tubo hasta que el peso de la columna de agua iguala esta fuerza.

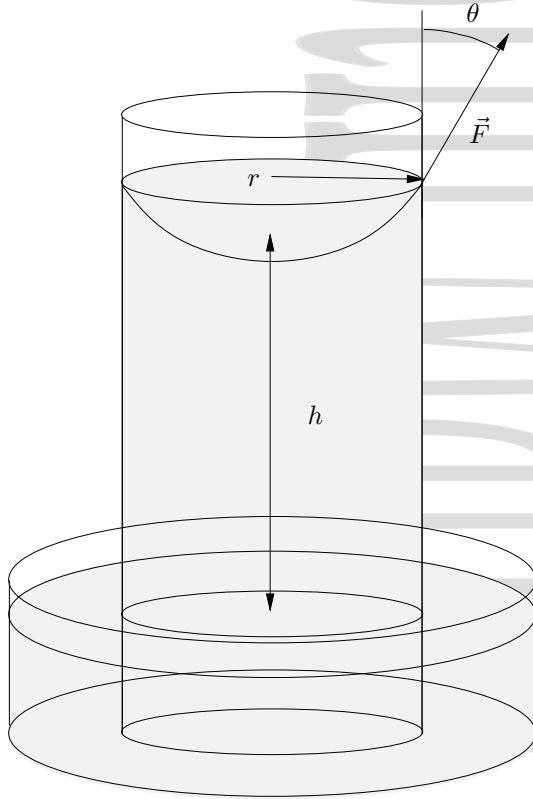


Figura 6-7: Capilaridad en un tubo fino. En un tubo de vidrio fino el agua experimenta un ascenso capilar como se muestra en la figura.

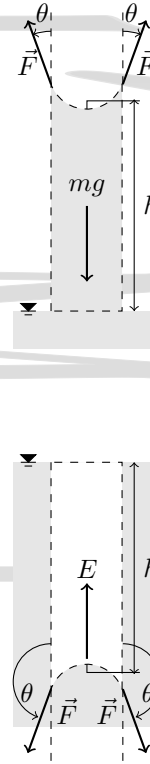


Figura 6-8: Equilibrio de fuerzas durante el ascenso (o descenso capilar). El equilibrio de fuerzas se calcula sobre un elemento de volumen que no incluye el sólido, por lo que no aparecen ni σ_{SG}^{ts} ni σ_{SL}^{ts} .

Consideremos el caso de un líquido que ha alcanzado una altura h en un tubo capilar de radio r . El tubo está abierto en su parte superior y se encuentra, por tanto, a la presión atmosférica. La componente vertical de la fuerza que sostiene al líquido es $F \cos \theta$ que, al ser la longitud de la línea de contacto $l = 2\pi r$, queda como $\sigma_{LG}^{ts} 2\pi r \cos \theta$.

Si despreciamos la ligera curvatura de la superficie del líquido, el volumen del mismo en la columna es $\pi r^2 h$ quedando, al hacer el equilibrio de las fuerzas,

$$\sigma_{LG}^{ts} 2\pi r \cos \theta = \rho g h S = \rho g h \pi r^2$$

dando para la altura de la columna capilar

$$h = \frac{2\sigma_{LG}^{ts} \cos \theta}{\rho g r} \quad (6-10)$$

6.2. Flujo en medios permeables.

En los capítulos anteriores hemos estudiado el movimiento de fluidos en un espacio “libre” de otros elementos. Sin embargo, los fluidos también pueden entrar y moverse a través de ciertos materiales, como ocurre con las aguas subterráneas que se filtran a través de los terrenos, o el petróleo que se mueve en las capas petrolíferas a los pozos petrolíferos. Este movimiento es consecuencia de la acción conjunta de fuerzas gravitatorias, de presión, y otras de diverso origen, que dan lugar a un desplazamiento que se produce siempre hacia las zonas de menor energía.

Se denominan *materiales* o *medios permeables* a aquéllos que permiten el paso de fluidos a su través, ya se trate de paso de gases o de líquidos. Los materiales permeables pueden ser de muy distintos tipos, esponjosos como algunas espumas, fibrosos, granulares como la arena de los terrenos, etc... En todos ellos la característica común es que el flujo tiene lugar a través de una intrincada red de microcanales, con unas elevadas pérdidas de carga dada la pequeña sección de éstos. En el caso de líquidos también aparecerán fuerzas de ascensión capilar junto a las fuerzas asociadas al movimiento.

Naturaleza de los terrenos como medios permeables.

Los distintos terrenos consisten en una gran cantidad de partículas pequeñas en contacto, con poros o espacios huecos entre las mismas que pueden estar ocupados por un fluido como agua o su vapor u otro gas o líquido. El fluido puede circular de una parte a otra del medio a través de la multitud de microcanales existentes entre las partículas que comunican los distintos poros, haciendo que el medio se comporte como un medio permeable.

Tabla 6-2: Valores típicos de la subida capilar para una serie de materiales

Material	Subida capilar
Arena gruesa	2 – 5 cm
Arena normal	12 – 35 cm
Arena fina	35 – 70 cm
Arcillas	2 – 4 m y superior

En el caso de un líquido en reposo en un medio permeable, éste asciende por el medio permeable por encima de la altura de la superficie libre del líquido de fuera del medio permeable. Esto es debido a lo siguiente: El medio permeable está constituido por un complejo conjunto de microcanales, a través de los cuales asciende el líquido por capilaridad. En la tabla 6-2 se dan algunos valores típicos de esta subida capilar para una serie de materiales. A la hora de modelizar el comportamiento de este medio permeable frente a este efecto, se suele sustituir en los cálculos la red real de capilares por un sistema de capilares verticales de un cierto diámetro con una determinada densidad de capilares por unidad de superficie. De esta forma se puede tratar el problema, así como el problema que surge cuando hay dos medios permeables de distintas características superpuestos.

La naturaleza del sistema de poros es variada dependiendo del tipo de terreno, aunque hay dos casos límites de especial interés, las *arenas* y las *arcillas* (los *limos* son un caso intermedio de partículas muy finas, pero de forma no laminar).

Las *arenas* se componen de partículas macroscópicas de forma redondeada o angulosa. Estas partículas drenan fácilmente, no absorben apenas agua, tienen un pequeño potencial capilar y cuando se secan no encogen de tamaño. Por el contrario, las *arcillas* están compuestas de partículas microscópicas de forma laminar. Éstas absorben agua con facilidad, son bastante impermeables una vez mojadas, tienen un elevado potencial capilar y disminuyen de volumen de forma considerable al secarse.

Las arenas se aproximan más al medio poroso ideal y son representativas del tipo de medio poroso que trataremos. Aunque esto parece imponer serias restricciones al estudio que vamos a hacer, en la mayoría de los problemas reales la baja permeabilidad de las arcillas las hace ser relativamente impermeables en comparación con los terrenos de grano más grueso.

Denominaremos *nivel freático* al lugar geométrico de los puntos del agua que se encuentran a la presión atmosférica. Corresponde al nivel que se alcanzaría en cada punto de la superficie del terreno si en el mismo se introdujera un piezómetro la profundidad suficiente. Si tomamos la presión atmosférica como referencia de medida de presiones

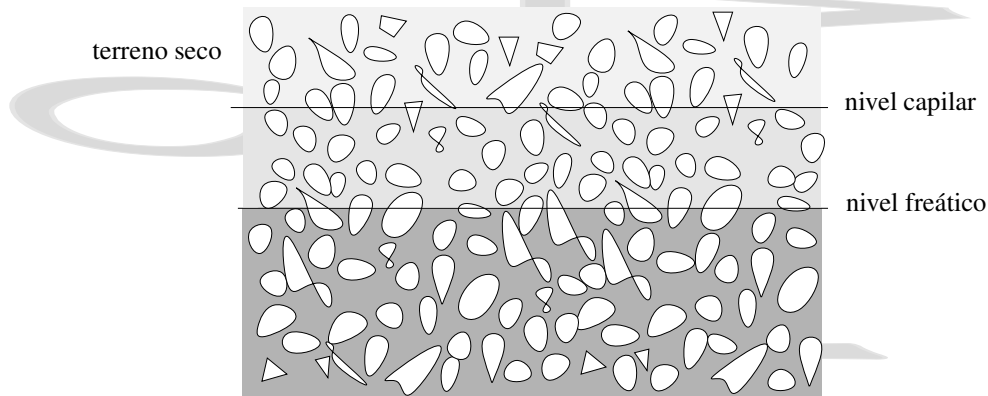


Figura 6-9: Nivel freático y capilar en un terreno para un ángulo de contacto agudo. Por encima del nivel capilar no se encuentran granos de arena húmedos. En el nivel freático, se cumple que $p = p_{\text{atm}}$.

(trabajamos en presiones manométricas), la presión del agua es positiva por debajo del nivel freático. Por encima del nivel freático pueden encontrarse granos de arena mojados debido al efecto de la capilaridad hasta el denominado *nivel capilar*. La presión del agua capilar es negativa si el nivel capilar está por encima del nivel freático (lo habitual en agua en terrenos, con un ángulo de contacto agudo). La capilaridad está asociada al denominado *potencial de matriz* o *potencial capilar* (sección 6.2.4).

Porosidad.

Asumamos que las partículas del medio poroso son todas de forma esférica uniforme. Si denominamos V al volumen total y V_h al volumen de los huecos, se define la *porosidad* como

$$n = \frac{V_h}{V} \quad (6-11)$$

que corresponde a la fracción del volumen total ocupada por los poros, y el *índice de poros* como

$$e = \frac{V_h}{V - V_h} \quad (6-12)$$

que corresponde al cociente entre el espacio ocupado por los poros y el espacio ocupado por las partículas sólidas. Ambos están relacionados por las expresiones

$$n = \frac{e}{1 + e} \quad e = \frac{n}{1 - n} \quad (6-13)$$

Para un empaquetamiento cúbico de esferas de diámetro d el volumen total (por esfera) es $V = d^3$, mientras que el volumen hueco es $V_h = d^3 - \pi d^3/6$ quedando una porosidad de

$$n = 1 - \frac{\pi}{6} = 0,476.$$



Para un empaquetamiento romboédrico, que representa la forma más compacta de empaquetar una serie de esferas uniformes, la porosidad es:

$$n = 1 - \frac{\sqrt{2}}{6} \pi = 0,26.$$



En la tabla 6-3 se dan valores para las porosidades de algunos terrenos naturales. Como hemos visto en los ejemplos de empaquetamiento cúbico y romboédrico de esferas uniformes, incluso en un medio poroso ideal el espacio hueco no es regular, sino que está compuesto por toda una serie de celdas cavernosas interconectadas por canales estrechos.

Tabla 6-3: Porosidades de algunos terrenos naturales.

Medio	Porosidad
Arena uniforme, suelta	46
Arena uniforme, densa	34
Arcilla glacial blanda	55
Arcilla glacial dura	37
Arcilla orgánica blanda	75
Bentonita blanda	84

El medio poroso como un medio continuo.

Los terrenos naturales contienen partículas que se desvían de forma considerable del comportamiento esférico (como hemos visto por ejemplo en las arcillas) y que además están lejos de ser de tamaño uniforme. Por tanto la red de microcanales es extremadamente complicada y de hecho en la práctica es imposible tratar de una forma razonable un terreno atendiendo de forma detallada a la naturaleza microscópica de su estructura de dichos microcanales. Por esta razón no fue posible tratar de forma sistemática el flujo permeable hasta el tratamiento de Darcy.

Afortunadamente, en los problemas de flujo a través de medios permeables no es necesario tener en cuenta el flujo a través de los canales individuales. Nuestro interés principal es el flujo macroscópico, entendido como el flujo global a través de una sección que contiene multitud de microcanales pero que puede ser considerada uniforme a efectos macroscópicos, en contraste con la distribución aproximadamente parabólica que se tendría para un fluido newtoniano en régimen laminar a través de un hipotético microcanal individual de sección circular. De este modo, en vez de trabajar con el medio permeable real con toda su estructura microscópica, trabajaremos con un medio permeable ficticio de propiedades continuas en cada punto que coinciden con el valor medio de las propiedades microscópicas del mismo en el entorno de dicho punto. Esto es de nuevo la *aproximación del continuo* o *hipótesis del continuo* que también se utiliza en Elasticidad o en la Mecánica de Fluidos general, pero ahora extendida al medio permeable a través del cuál fluyen éstos.

Matemáticamente el flujo permeable es una situación análoga a la que se tiene en los procesos de conducción del calor en un cuerpo entre puntos que se encuentran a distintas temperaturas, actuando en ese otro caso la temperatura como magnitud potencial. De esta forma, se produce un flujo de calor a través del medio entre puntos que se encuentran a distintas temperaturas, dependiendo este flujo de las características del medio. En el estudio del problema de las filtraciones a través de un medio permeable que nos ocupa, la magnitud potencial que regula el proceso será la energía por unidad de peso del fluido, produciéndose entre puntos en los que el fluido tiene distinta energía por unidad de peso una filtración que depende de las características del medio.

6.2.1. El permeámetro. La ley de Darcy macroscópica en una dimensión.

El flujo real a través de medios permeables es, como acabamos de ver, extremadamente complejo. A causa de esto, no se puede abordar de forma sistemática el análisis de dicho flujo de forma microscópica. De hecho todos los intentos fracasaron hasta que en el año 1856 Henry Darcy publicó una relación macroscópica simple en “*Les fontaines publiques de la ville de Dijon*”[19] basada en sus experimentos. Para llevar a cabo sus experiencias simplificó al máximo el problema a analizar, utilizando un medio permeable artificialmente homogéneo e isotrópico a través del cual hizo pasar un flujo de agua en condiciones controladas. El dispositivo utilizado se denomina *permeámetro* y mostraremos el resultado del análisis del flujo a través del mismo en el tipo particular de permeámetro que se muestra en la figura 6-10.

Un permeámetro como el de la figura 6-10 consiste en un cilindro impermeable hueco de sección interna S que contiene en su interior un determinado medio permeable, separado del agua libre en A y B por un par de mallas al principio y al final del medio. Estas mallas permiten el paso del agua su través, pero no el paso del material permeable, que queda confinado dentro de las mallas. En dicho permeámetro se colocan unos piezómetros para medir la altura piezométrica entre distintos puntos del flujo a través del medio permeable, separados una distancia conocida. En particular, se colocan los piezómetros en los puntos 1 y 2 separados una distancia Δl en la dirección del flujo. Pueden colocarse piezómetros adicionales en el fluido libre antes y después del medio permeable.

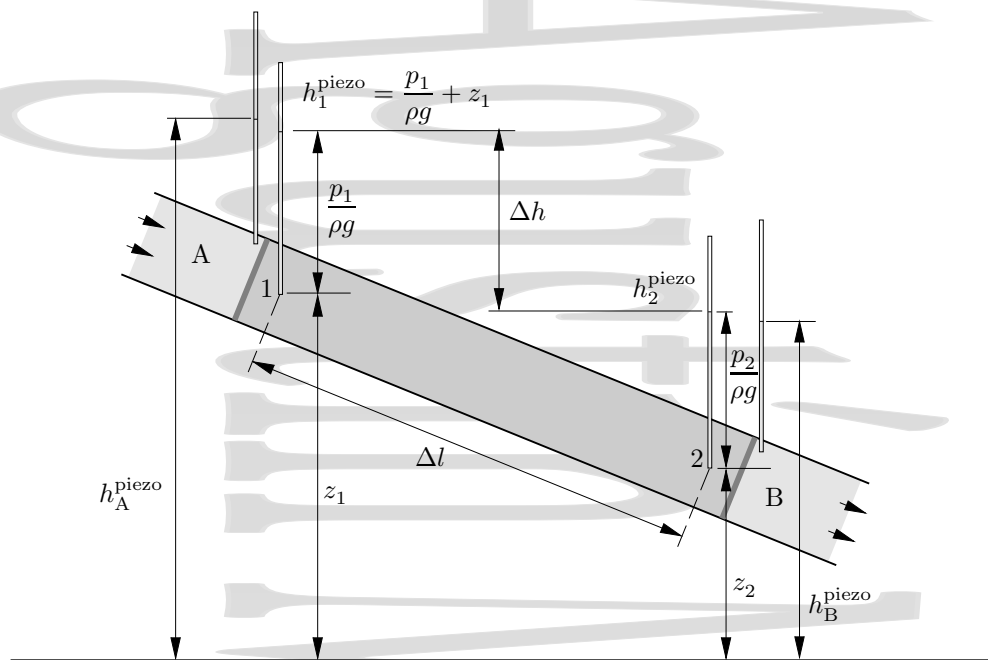


Figura 6-10: Flujo a través de un permeámetro.

Una vez construido el permeámetro, se mide la disminución de alturas piezométricas entre los puntos 1 y 2 a través del medio permeable para distintos caudales conocidos, que se regulan controlando la altura en depósitos antes y después.

La experiencia muestra que para caudales no demasiado grandes (en la práctica, para la mayor parte de caudales no forzados) existe una relación de proporcionalidad estricta entre el caudal y el cociente

$$\bar{i} = \frac{\Delta h}{\Delta l}. \quad (6-14)$$

al que se denomina *gradiente hidráulico promedio*. Esta relación de proporcionalidad se conoce como *ley de Darcy* y se expresa como

$$\frac{Q}{S} = ki = k \frac{\Delta h}{\Delta l}. \quad (6-15)$$

En Mecánica del Suelo, se denomina al coeficiente de proporcionalidad k *coeficiente de permeabilidad* o *conductividad hidráulica* que como se ve claramente en la ecuación (6-15) tiene dimensiones de velocidad. Este coeficiente representa la facilidad que ofrece el medio para dejarse atravesar por el fluido. Su valor depende del fluido concreto y del tamaño promedio de los poros y también está relacionado con la distribución de tamaños y formas de las partículas y con la estructura del medio. Así, este coeficiente puede cambiar para el agua en un factor de hasta 10^6 entre el de una grava y el de una arcilla. Incluso una pequeña proporción de material fino en uno más grueso puede cambiar de forma importante su magnitud. Como los caudales filtrados normalmente son pequeños, la conductividad hidráulica también lo es, a menudo del orden de cm/día en flujos naturales.

En realidad el permeámetro utilizado por Darcy no es el de la figura 6-10 sino el que se muestra en la figura 6-11, extraída de su informe original.

6.2.2. Velocidad de descarga y velocidad microscópica promedio.

Como se ha mencionado anteriormente el flujo microscópico real a través de medios permeables es muy complejo y no tiene sentido intentar analizar las velocidades con que circula el líquido a través de los distintos microcanales. En su lugar utilizaremos dos velocidades, la que denominaremos velocidad de flujo y la que denominaremos velocidad microscópica de filtración.

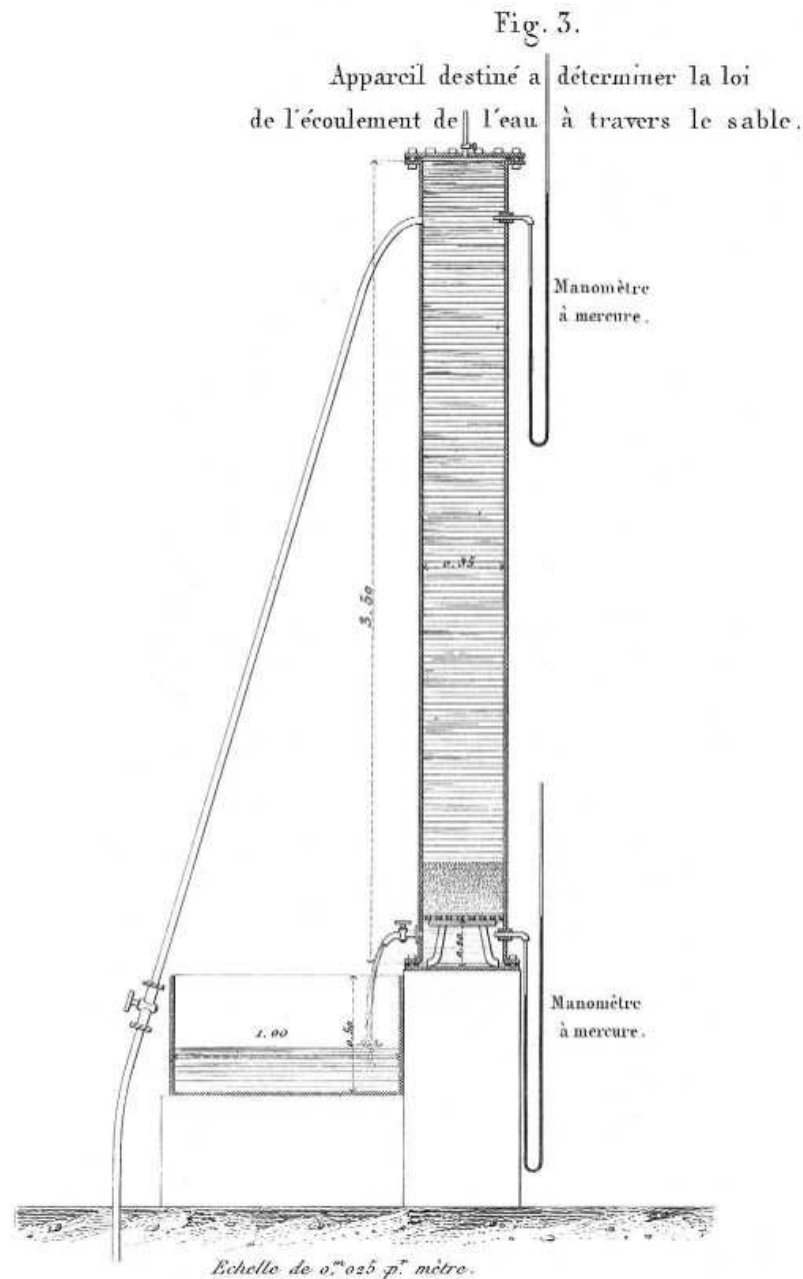


Figura 6–11: Permeámetro original utilizado por Darcy. Extraído de su informe *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*, 1856[19].

La *velocidad de descarga* o *velocidad de flujo* se define como la cantidad de fluido que atraviesa el medio poroso por unidad de tiempo y de área total perpendicular al flujo, es decir Q/S en el caso del permeámetro que hemos estudiado en la figura 6–10 y en el de Darcy de la figura 6–11. La velocidad de descarga no corresponde a la velocidad real del fluido en los microcanales sino que tiene un significado únicamente macroscópico. En realidad el fluido (p.ej. agua subterránea) circula por el medio permeable en una compleja trayectoria no rectilínea, recorriendo grandes distancias.

Obviamente, como el flujo únicamente puede tener lugar entre poros de terreno saturado interconectados entre sí, la velocidad a través de cualquier sección únicamente puede considerarse en un sentido estadístico, lo que hacemos a través del tratamiento del medio real como un medio continuo que ya hemos descrito. Si denominamos x_p a la relación efectiva entre el área S_p correspondiente a los poros y el área total S de la sección, está claro que $x_p = S_p/S$. El

caudal filtrado es entonces

$$Q = Sv = x_p S \bar{v}_m, \quad (6-16)$$

donde $x_p \bar{v}_m$ es la velocidad de descarga y a \bar{v}_m se le denomina *velocidad microscópica promedio[†] de filtración*. Así, esta velocidad es la velocidad promedio a través de los canales individuales, mientras que la velocidad de descarga es la velocidad promedio a través de todo el medio, incluyendo los granos de terreno. Realmente ni siquiera esta velocidad es la velocidad real, sino sólo el promedio de las componentes de la velocidad microscópica en la dirección del flujo (el promedio en la dirección perpendicular al flujo debe anularse). Dependiendo de la importancia de las componentes en las direcciones perpendiculares al flujo la velocidad microscópica real puede ser aún más alta.

Indaguemos algo más en x_p . Si consideramos una sección S del medio que se encuentra a una altura z y denominamos S_p a la superficie de esa sección correspondiente a los poros, se tiene que a la altura z

$$x_p(z) = \frac{S_p(z)}{S}. \quad (6-17)$$

Promediando a un cilindro de altura h , el valor promedio de x_p será

$$\bar{x}_p = \frac{1}{h} \int_0^h x_p(z) dz \quad (6-18)$$

que, dividiendo por S y operando, da

$$\bar{x}_p = \frac{1}{hS} \int_0^h S x_p(z) dz = \frac{1}{V} \int_0^h S_p(z) dz \quad (6-19)$$

donde V es el volumen total del cilindro, mientras que la integral es el volumen hueco total en el cilindro. Así, el valor medio de x_p es precisamente la porosidad n .

En general se trabaja con velocidades de descarga, y todo lo que sigue se referirá a velocidades de descarga. Sólo en algunos casos muy concretos en los que se analiza el comportamiento microscópico en entornos controlados se trabaja con la velocidad microscópica real.

Si el flujo a través del medio permeable considerado puede analizarse como flujo a través de un medio continuo es posible extender esta definición a un pequeño elemento del medio permeable en torno a un punto, de forma que en estas condiciones podemos definir un valor (en general vectorial) de la velocidad de flujo en cada punto del medio en permeación.

Rango de validez de la ley de Darcy.

Como se ha visto en la sección 4.1.2 la observación visual de colorantes inyectados en los líquidos que circulan por una tubería llevó a Reynolds (1883) a concluir que el orden dentro del flujo depende de la velocidad del mismo. A velocidades pequeñas el flujo era ordenado, en capas, es decir, laminar. Por el contrario, al aumentar la velocidad se produce una mezcla entre el agua y el colorante, el flujo se hace irregular o turbulento.

Las distintas experiencias realizadas muestran de forma concluyente que para pequeñas velocidades (en el rango de flujo laminar), la ley de Darcy (6-15) representa de forma adecuada el flujo a través de un medio permeable, con una relación lineal entre el gradiente hidráulico y la velocidad del flujo. Según el flujo se va haciendo turbulento, el comportamiento del gradiente hidráulico se aproxima mejor mediante una expresión de la forma

$$i = \frac{\Delta h}{\Delta l} = av + bv^n \quad (6-20)$$

donde Δh representa la pérdida de carga en la distancia Δl , a y b son constantes y n varía entre 1 y 2, dependiendo de las características del flujo. Por ejemplo, para el flujo turbulento de agua a través de columnas de perdigones de tamaño uniforme, se obtiene $n = 2$ (Lindquist).

[†] En algunos textos en castellano se utiliza la denominación velocidad de filtración para la velocidad de descarga. Como esto no es generalizado y en textos sajones es más frecuente lo contrario (denominar velocidad de filtración a la velocidad microscópica promedio), evitaremos en lo posible el término velocidad de filtración.

Al igual que en el caso de los fluidos en tuberías (véase la sección 5.1.1), utilizaremos el número de Reynolds (número adimensional que relaciona las fuerzas de inercia con las viscosas) para caracterizar el tipo de régimen, laminar o turbulento, pero adaptado al caso particular del flujo a través de medios permeables,

$$Re = \frac{vD\rho}{\mu} = \frac{vD}{\nu}, \quad (5-1)$$

donde ahora v es la velocidad de descarga, D el diámetro promedio de las partículas, ρ la densidad del fluido, μ su viscosidad dinámica y ν su viscosidad cinemática.

El valor crítico del número de Reynolds en el cual el flujo permeable cambia de laminar a turbulento está entre 1 y 12. Sin embargo para nuestros efectos, será suficiente dar por válida la ley de Darcy cuando el número de Reynolds es menor o igual que la unidad.

$$\frac{vD\rho}{\mu} = \frac{vD}{\nu} \leq 1 \quad (6-21)$$

Sustituyendo los valores de ρ y de μ para el agua en la ecuación anterior y asumiendo un valor de la velocidad de descarga de 0,25 cm/seg, se obtiene $D = 0,4$ mm. Este es un valor típico del tamaño medio de partículas para la arena media/gruesa. Por tanto parece bastante razonable que para medios permeables normales, en los cuales el tamaño medio de grano es considerablemente menor, la validez de la ley de Darcy sea clara. De hecho, hay que subrayar que el carácter laminar del flujo natural del agua a través de medios permeables en las condiciones dadas es uno de los pocos ejemplos válidos de este tipo de flujo en situaciones reales de ingeniería hidráulica.

La conductividad hidráulica.

Hemos visto que para flujo laminar a través de un medio permeable se satisface la Ley de Darcy

$$v = k \frac{\Delta h}{\Delta l}$$

donde k es la conductividad hidráulica. La densidad y la viscosidad del fluido ejercen una influencia en la velocidad con la que éste circula a través del medio permeable, por lo que es interesante aislar la parte de k que depende de esas propiedades. Para ello, introducimos la *permeabilidad física* o *permeabilidad intrínseca* k_0 (con unidades de superficie), que es un parámetro que caracteriza las propiedades del medio y es independiente de las propiedades del fluido. La relación entre la permeabilidad física y la conductividad hidráulica viene dada por

$$k = k_0 \frac{\rho g}{\mu} = \frac{g}{\nu} k_0 \quad (6-22)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de Darcy (6-15), se tiene

$$v = k_0 \frac{\rho g}{\mu} \frac{\Delta h}{\Delta l} = k_0 \frac{g}{\nu} \frac{\Delta h}{\Delta l} \quad (6-23)$$

que indica que la velocidad de descarga es inversamente proporcional a la viscosidad del fluido. Es interesante utilizar esta última expresión cuando se trabaja con más de un fluido o cuando las propiedades de éste varían por ejemplo a causa de cambios de temperatura. Aunque la permeabilidad física es idealmente la misma para distintos fluidos y depende únicamente del medio permeable, en la práctica éste puede incluso cambiar de dimensiones con distintos fluidos obteniéndose en ese caso distintos valores de la permeabilidad física.

En los problemas típicos de flujo a través de medios permeables, en los cuales estaremos interesados en el flujo de un único fluido relativamente incompresible es más sencillo utilizar la ley de Darcy con k . Algunos valores típicos de la conductividad hidráulica para diversos medios se dan en la tabla 6-4.

Puede relacionarse la permeabilidad física k_0 con la porosidad n del material para flujo en régimen laminar como el que se tiene en la región de validez de la ley de Darcy a partir de la fórmula de Poiseuille (5-5) y de la relación (6-16). En la drástica aproximación de tuberías cilíndricas de radio R el correspondiente al tamaño promedio de los poros, la velocidad de descarga queda en la forma

$$\bar{v} = n \frac{Q}{S} = \frac{nQ}{8} \frac{\rho g}{\mu} \frac{\Delta h}{L}$$

Tabla 6-4: Valores aproximados de la conductividad hidráulica y el tamaño medio de grano para distintos medios porosos. Para la clasificación de arenas y limos se ha utilizado el denominado “sistema europeo”.

Tipo de terreno	Conductividad hidráulica k (cm/seg)	Tamaño medio de grano (mm)
Arcilla no meteorizada	$< 10^{-7}$	
Arcilla meteorizada	$10^{-6} - 10^{-7}$	
Turba o limo fino	$10^{-5} - 10^{-6}$	$2 \times 10^{-3} - 6 \times 10^{-3}$
Limo medio	$10^{-4} - 10^{-5}$	$6 \times 10^{-3} - 2 \times 10^{-2}$
Arena limosa (limo grueso)	$10^{-3} - 10^{-4}$	$2 \times 10^{-2} - 6 \times 10^{-2}$
Arena fina	$10^{-2} - 10^{-3}$	$6 \times 10^{-2} - 0,2$
Arena media	$10^{-1} - 10^{-2}$	$0,2 - 0,6$
Arena gruesa	$1,0 - 10^{-1}$	$0,6 - 2$
Gravas	$> 1,0$	> 2

que al comparar con la ley de Darcy en función de la permeabilidad física (6-23) da un valor para la permeabilidad física en la aproximación que utilizamos de

$$k_0 = \frac{nR^2}{8} \quad (6-24)$$

6.2.3. La ecuación de Bernoulli con permeación.

En la dinámica de fluidos libres, para un flujo estacionario no viscoso e incompresible, la ecuación de Bernoulli

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{\bar{v}^2}{2g} + z = H_{\text{tot}} = \text{cte} \quad (3-37)$$

establece que la suma de la alturas de presión $\frac{p}{\rho g}$, de velocidad o cinética $\frac{\bar{v}^2}{2g}$ y geométrica z es constante en cualquier punto a lo largo de una línea de flujo.[†] En el flujo a través de medios permeables como en el caso del permeámetro que se muestra en la figura 6-10 es necesario tener en cuenta las pérdidas de energía producidas por la resistencia viscosa en los poros. Por tanto es necesario considerar la ecuación de Bernoulli generalizada en la forma ya conocida

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{\bar{v}_A^2}{2g} + z_A - \Delta h_{AB} = \frac{p_B}{\rho g} + \frac{\bar{v}_B^2}{2g} + z_B \quad (4-1)$$

donde Δh_{AB} representa la pérdida total de carga (energía por unidad de peso del fluido) en la distancia Δl .

Si el flujo a través del medio permeable puede analizarse como un flujo a través de un medio continuo como se describe en la página 84, podemos utilizar unas líneas de flujo definidas como tangentes a la velocidad de flujo v (véase la sección 6.2.2) en cada punto del medio continuo en permeación. Esto puede verse como el flujo de un hipotético fluido libre “anómalo” a través de un volumen del espacio que coincide con el recinto en permeación. Este flujo sería muy viscoso y tendría unas propiedades especiales[‡] en las superficies límite del medio en permeación (véanse las secciones 6.2.4 y 6.2.8). En estas condiciones, la expresión (4-1) anterior también puede utilizarse a lo largo de una línea de flujo dentro del medio permeable.

En la práctica totalidad de los problemas de filtraciones naturales, la altura de velocidad que aparece es tan pequeña que puede despreciarse frente a las otras contribuciones. Por ejemplo, una velocidad de filtración de 30 cm/seg. que es muy grande comparada con las velocidades de filtración típicas, daría una altura de velocidad de 0,5 cm. Por tanto, la ecuación de Bernoulli generalizada para flujo en medios permeables puede escribirse a efectos prácticos en la forma

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 - \Delta h_{12} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 \quad (6-25)$$

a través de las alturas piezométricas, que es lo que realmente podemos medir. Por tanto, en la práctica, en los problemas normales de flujo a través de medios permeables es indiferente hablar de altura piezométrica o total.

[†] Si el flujo es no rotacional, esto es cierto en general entre dos puntos cualesquiera del tubo de flujo.

[‡] Alguna de estas propiedades puede ser distinta de las que se observan en un fluido real libre, p.ej., no hay condición de no deslizamiento.

6.2.4. Potencial hidráulico y sus componentes. El campo hidráulico.

Podemos interpretar cada uno de los elementos que aparecen en la altura piezométrica de (6-25) como energías potenciales por unidad de peso en un campo de presiones y energías por unidad de peso en el campo gravitatorio. Para definir esta energía potencial, es necesario establecer una referencia para la energía potencial gravitatoria, por lo que en realidad medimos la energía potencial respecto de la que tendría en el estado de referencia. En función de las energías potenciales correspondientes, la resultante de las fuerzas que actúan en cada punto del flujo sobre el fluido puede obtenerse como el gradiente de la energía potencial en dicho punto del medio en permeación. Cuando se realiza un trabajo sobre el fluido que circula por el medio poroso, esta energía potencial cambia en una cantidad igual al trabajo realizado.

Se denomina *potencial hidráulico* Ψ a la energía total del fluido por unidad de peso del mismo. Como hemos visto, hay distintas contribuciones a este potencial hidráulico, el *potencial de presión* o *altura de presión* $\Psi_p = p/(\rho g)$, el *potencial gravitacional* o *altura geométrica* $\Psi_z = z$, y el *potencial de velocidad* o *altura de velocidad* o *cinética* $\Psi_v = v^2/(2g)$, que como hemos visto es despreciable en los problemas habituales de movimiento de fluidos a través de un medio permeable, por lo que lo que tenemos es realmente un potencial.

Hay otra contribución al potencial hidráulico de la que aún no hemos hablado de forma explícita, y es el *potencial de matriz* o de *succión*, Ψ_m . Esta contribución está ligada a la presencia de fuerzas de ascensión (o descenso) capilar. Éstas aparecen como consecuencia de la interacción del agua con el esqueleto del medio poroso o matriz de partículas sólidas en que está embebida (véase la sección 6.1.3). Estas fuerzas capilares son en general atractivas para los suelos y cerámicas porosas, pero pueden ser negativas para otros materiales porosos. Cuando las fuerzas son atractivas el potencial de matriz tiene valores negativos.

Finalmente mencionar el *potencial osmótico*, que únicamente aparece cuando existen membranas semipermeables en el medio poroso (por ejemplo, las raíces de las plantas que se encuentran en el suelo) y que no tendremos en cuenta.

Cuando entre dos puntos existe una diferencia de potencial hidráulico aparece una fuerza que intenta producir movimiento del fluido hacia posiciones de menor energía potencial, y este movimiento se producirá únicamente entre puntos con distintos potenciales hidráulicos. En general, el potencial hidráulico puede variar con el tiempo, y además no está distribuido de forma uniforme (en ese caso no habría movimiento). Por tanto, lo que en realidad se tiene es una distribución espacio-temporal del potencial hidráulico, el denominado *campo hidráulico*

$$\Psi = \Psi(x, y, z, t) \quad (6-26)$$

Se denomina *superficie equipotencial hidráulica* al lugar geométrico de los puntos del medio permeable en los cuales el potencial hidráulico tiene el mismo valor. Obviamente, como el potencial hidráulico no puede tener valores distintos en el mismo punto en el mismo instante, sus superficies equipotenciales no pueden cruzarse.

En estas notas no consideraremos el efecto de los potenciales de matriz y osmótico en el flujo. Como además el potencial de velocidad es muy pequeño comparado con los potenciales de presión y gravitacional, en lo que sigue el valor del potencial hidráulico coincidirá con el valor de la altura piezométrica en cada punto del flujo.

6.2.5. La ley de Darcy microscópica en una dimensión.

Si en la expresión (6-14) para el gradiente hidráulico promedio tomáramos distancias Δl cada vez más pequeñas respecto del punto inicial, se tiene, en el límite infinitesimal, el *gradiente hidráulico* en cada punto

$$i = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta h_{21}^{\text{piezo}}}{\Delta l} = -\frac{dh}{dl} = -\frac{d\Psi}{dl} \quad (6-27)$$

del medio en permeación en unas condiciones dadas, en las que el flujo tiene lugar en una dirección dada, la misma en la que se mide la variación de potencial hidráulico $d\Psi$ y la distancia dl en la que ésta se mide. Obsérvese que, como $\Delta h_{21}^{\text{piezo}}$ representa la disminución de altura piezométrica en el intervalo correspondiente, al representar las expresiones en función del potencial hidráulico (esencialmente variación de altura piezométrica) es necesario añadir un signo negativo.

En función de esta expresión para el gradiente hidráulico se tiene la *ley de Darcy microscópica en una dimensión*,

$$\frac{Q}{S} = v = ki = -k \frac{d\Psi}{dl} \quad (6-28)$$

que muestra la ya conocida dependencia lineal entre el gradiente hidráulico y la velocidad de descarga v .

Aunque en la ecuación (6-28) la ley de Darcy se presenta en forma diferencial es necesario recalcar que en modo alguno describe la situación microscópica en la red de poros del medio. De forma estricta, la ley de Darcy representa el equivalente estadístico macroscópico de las ecuaciones del movimiento de Navier-Stokes (4-20) para el flujo viscoso a través de un medio permeable. Es precisamente esta equivalencia la que permite el tratamiento del flujo permeable en el marco de una teoría de campos potenciales. A nuestros efectos, todas las contribuciones viscosas serán consideradas a través de la ley de Darcy, y el flujo a todos los demás efectos será considerado como no viscoso o perfecto.

6.2.6. La ley de Darcy microscópica en tres dimensiones.

Si en un punto genérico del flujo permeable a través de un medio isótropo observáramos la experiencia anterior en tres direcciones mutuamente perpendiculares, x , y y z , se tendrían las expresiones para la ley de Darcy (6-28) en cada una de estas direcciones como

$$v_x = ki_x = -k \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

$$v_y = ki_y = -k \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$v_z = ki_z = -k \frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

que puede escribirse como

$$\vec{v} = -k \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \vec{u}_z \right) = -k \vec{\nabla} \Psi. \quad (6-29)$$

para un medio permeable isótropo, siendo la conductividad hidráulica k un escalar en este caso.

Si el medio es anisótropo la situación es más compleja, y en general la conductividad hidráulica viene representada por un tensor con varias componentes distintas de cero, expresándose la ley de Darcy en un punto en la forma

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial z} \end{pmatrix} = -\hat{k} \vec{\nabla} \Psi \quad (6-30)$$

El tensor conductividad hidráulica \hat{k} es un tensor simétrico de segundo orden, y por lo tanto existe un sistema de referencia (sistema de ejes principales) en el cual todos los elementos de fuera de la diagonal son nulos, denominándose a los elementos de la diagonal en ese sistema elementos principales del tensor o, en este caso concreto, *conductividades hidráulicas principales*. En este sistema de ejes principales, r_1 , r_2 y r_3 , la expresión anterior toma la forma

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial r_1} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial r_2} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial r_3} \end{pmatrix}. \quad (6-31)$$

El vector gradiente es un vector que es siempre perpendicular a las superficies equipotenciales del campo escalar en cada punto. Por tanto al ser, para un material isótropo $\vec{v} = -k \vec{\nabla} \Psi$ la velocidad de descarga es siempre perpendicular a

las superficies de potencial hidráulico constante para un material isótropo. Por el contrario, para un material anisótropo, aunque el gradiente sigue siendo perpendicular a las equipotenciales, la velocidad en general no lo será al aparecer la conductividad hidráulica en forma de tensor en la ecuación (6-31) con distintos valores de k . Sin embargo, sí se cumplirá para los materiales isótropos ficticios equivalentes a uno anisótropo que se obtienen redimensionando los ejes y se tratan en la sección 6.2.9.

6.2.7. Flujo a través de terrenos saturados homogéneos e isótropos.

La conductividad hidráulica de un suelo saturado es constante si su estructura es estable, porque todos sus poros y capilares están ocupados por el agua, igual que cualquier otro material poroso en idénticas condiciones. Por el contrario, la conductividad hidráulica de un suelo no saturado puede cambiar continuamente en función de los cambios que se produzcan en el potencial de matriz. Asimismo, en algunas situaciones como durante las lluvias se tienen cambios temporales del contenido de agua en el suelo. Lo mismo ocurre si se está produciendo una degradación del medio o del fluido durante el proceso de flujo permeable.

En el caso general en el que puede haber variación temporal del flujo, es necesario tener en cuenta no sólo la ley de Darcy, sino también la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}). \quad (3-9)$$

Sin embargo cuando se tiene en cuenta que la compresibilidad de los líquidos es muy pequeña, la densidad tiene una variación despreciable con el tiempo y la posición, y la expresión anterior se puede escribir como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0. \quad (3-11)$$

Estudiaremos ahora como es la ecuación diferencial que describe el flujo. Para ello nos limitaremos al caso en que el medio permeable es estable, a régimen estacionario y a un fluido incompresible como el agua.

Si el medio es además isótropo, el tensor conductividad hidráulica es un tensor diagonal con todas las componentes de la diagonal iguales a un único valor de la conductividad hidráulica, y la ley de Darcy para medios isótropos puede escribirse como

$$\vec{v} = -k \vec{\nabla} \Psi \quad (6-29)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación anterior y teniendo en cuenta que para un medio homogéneo k no depende del punto y por tanto es constante frente a derivadas espaciales, se tiene que la ecuación diferencial que hay que resolver para obtener la distribución de potencial hidráulico es

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0. \quad (6-32)$$

Esta ecuación diferencial es la conocida *ecuación de Laplace*, ampliamente estudiada en el electromagnetismo y en el tratamiento de algunos problemas de conducción del calor. Como se observa en esta ecuación, en un medio homogéneo e isótropo la forma del campo hidráulico no depende de la conductividad hidráulica, sino que depende únicamente de las condiciones de contorno en los límites, es decir de la forma del recinto y de las características de estos límites. Obviamente, el flujo sí depende de la conductividad hidráulica a través de la ley de Darcy.

6.2.8. La ecuación de Laplace y su resolución.

Como hemos dicho anteriormente, la ecuación de Laplace ha sido ampliamente estudiada en Física Matemática por su interés en diversos campos que van desde el Electromagnetismo a la Conducción del Calor. Su resolución depende principalmente de la geometría del recinto espacial en el que ésta se verifica (como por ejemplo un suelo genérico, o un material poroso alrededor de la zapata de cimentación de un edificio, un muro de carga o una presa de gravedad) y de las condiciones de contorno que se cumplen en los límites del recinto. Es decir, la resolución de la ecuación de Laplace depende de las características o los valores que ha de tener el potencial hidráulico (o su gradiente, directamente relacionado con la velocidad de descarga) en la superficie límite del recinto en estudio. Estas condiciones de contorno

vienen, en general, impuestas por la naturaleza física de estos límites, como por ejemplo, la presencia de una capa impermeable.

Se dice que estas *condiciones de contorno* son *condiciones de Dirichlet* o de *primera especie* cuando lo que se especifica son los valores del potencial hidráulico en la superficie límite, mientras que se dice que estas condiciones son *condiciones de von Neumann* o de *segunda especie* si lo que se especifica son condiciones en el gradiente del potencial hidráulico (en la velocidad, es decir en la derivada espacial del potencial hidráulico). Se dice que se tienen unas *condiciones de contorno mixtas* cuando sobre una parte de la superficie límite se conocen los valores del potencial hidráulico y sobre otra parte se conoce información sobre la velocidad.

Las técnicas de resolución de la ecuación de Laplace son muy conocidas en el ámbito de la Física Matemática y utilizan fundamentalmente el método de separación de variables en coordenadas cartesianas, esféricas o cilíndricas, según la simetría del recinto permeable. Estos son los casos más favorables y al mismo tiempo, los menos frecuentes. Si el recinto no tiene una simetría apropiada se utiliza, como técnica alternativa, la transformación conforme en variable compleja o el método de imágenes. Para la mayor parte de los problemas que son intratables analíticamente, es necesario recurrir a métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales, como los de diferencias finitas o elementos finitos. A menudo se utilizan estos métodos también para abordar problemas que, aunque resolubles analíticamente, requieren un excesivo esfuerzo.

Condiciones de contorno para la resolución de la ecuación de Laplace.

En un medio permeable saturado aparecen distintos tipos de condiciones de contorno, todas presentes en el ejemplo de la presa de tierra que se muestra en la figura. Consideremos en detalle las características de cada una de ellas.

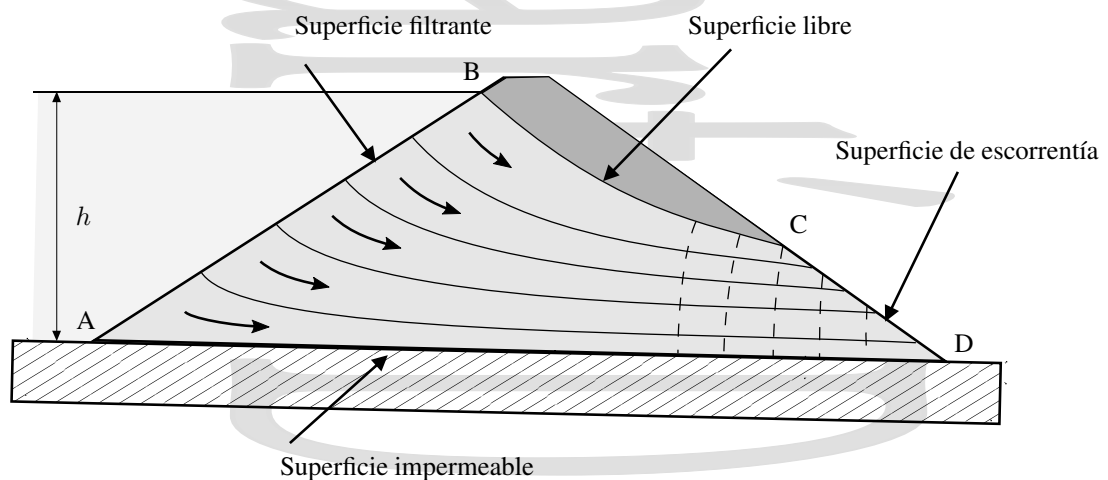


Figura 6-12: Presa de tierra en la que aparecen los cuatro tipos de condiciones de contorno que estudiaremos.

Superficies impermeables.

Una *superficie impermeable* separa el medio permeable (saturado) de un medio impermeable con el que está en contacto. El fluido no puede penetrar a través de una superficie impermeable, ya que las características del material impermeable lo impiden. Por tanto, la componente de la velocidad perpendicular a la superficie debe ser cero en cada punto. Sin embargo no se impone restricción alguna a sus componentes tangenciales, es decir, una superficie impermeable define el lugar geométrico de una serie de líneas de flujo. Al mismo tiempo una línea de flujo satisface la condición de una superficie impermeable y, de hecho, las paredes de un tubo de flujo, se consideran a todos los efectos como superficies impermeables.

Hay dos tipos de superficies impermeables típicas. Una es la superficie impermeable que tiene el fluido por encima, como ocurre cuando se considera el flujo a través de un medio permeable que se encuentra sobre una base de otro material de conductividad hidráulica mucho menor que la del medio permeable. En este caso la superficie impermeable

está definida por las líneas de corriente más bajas. También puede tenerse una estructura impermeable sobre el terreno, como una presa de gravedad, o la pared vertical de un muro, o un acuífero confinado.

En un material isótropo, al ser las superficies equipotenciales del campo hidráulico perpendiculares a la velocidad de descarga, éstas deben ser también perpendiculares a la superficie impermeable. Si denominamos n y t a las direcciones normal y tangencial, respectivamente, en un punto de la superficie, se tiene

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0. \quad (6-33)$$

Esto no es cierto para un material anisótropo en el que formarán ángulos distintos de 90° . Sin embargo sí se cumple para los materiales isótropos equivalentes a un anisótropo que se tratarán en la sección 6.2.9.

Superficies filtrantes.

Las *superficies filtrantes* corresponden a los límites del medio permeable en contacto con los límites del fluido libre. En estas superficies filtrantes el valor del potencial hidráulico será el del fluido libre en contacto con la misma, es decir,

$$\Psi = \frac{p}{\rho g} + z = \text{cte}. \quad (6-34)$$

Las superficies filtrantes en contacto con una masa de fluido libre son por tanto superficies equipotenciales, cuyo potencial hidráulico es igual a la altura de carga total del fluido en contacto con el medio permeable. Obviamente, distintas superficies filtrantes del medio permeable en contacto con distintas masas de fluido libre con distintas alturas de carga totales tendrán distintos potenciales hidráulicos.

Para materiales isótropos la velocidad de descarga será perpendicular a las superficies equipotenciales del campo hidráulico y por tanto a las superficies filtrantes. Para materiales anisótropos esto no será cierto, a no ser que se trate de los materiales isótropos equivalentes a uno anisótropo que se tratan en la sección 6.2.9.

Superficie de escorrentía.

La *superficie de escorrentía* representa un límite en el cual el flujo emergente del medio permeable sale a una zona libre de líquido y de terreno, es decir, sale a la atmósfera. Como la presión a la salida es la atmosférica, en esta superficie se cumple que el potencial hidráulico es

$$\Psi = z \quad (6-35)$$

En principio no hay restricciones en \vec{v} , salvo que obviamente debe tener una componente perpendicular a la superficie.

Superficie libre o línea de filtración.

La *superficie libre* está compuesta por las líneas de flujo superiores en el terreno permeable y coincide con el *nivel freático*. Esta superficie se encuentra dentro del medio permeable y separa la región de flujo saturado de la región del medio permeable a través de la cual no hay flujo. Se diferencia de la superficie impermeable en que en este caso son las características del flujo las que hacen que no se atravesase esta superficie, en vez de las características del material de la superficie, que para la superficie libre es el mismo que en la zona en la que sí hay flujo. Su determinación es uno de los principales problemas que surgen a la hora de estudiar de forma analítica el problema del flujo permeable. Por un lado esta superficie debe comportarse como una superficie impermeable, al estar compuesta por líneas de flujo, y por otro lado es evidente que la presión en cada punto de esa superficie es constante e igual a la presión atmosférica, por lo que el potencial hidráulico será

$$\Psi = z \quad (6-36)$$

lo que muestra que el potencial hidráulico a lo largo de una superficie libre varía como la altura en cada punto de la superficie. Asimismo, al igual que en las superficies impermeables, en un medio isótropo las superficies equipotenciales del potencial hidráulico son perpendiculares a las superficies libres.

Ejemplos simples de resolución de la ecuación de Laplace.

Veamos algunos casos de resolución de la ecuación de Laplace en simetrías sencillas,

El permeámetro. Consideremos el permeámetro de la figura 6-11 en el que las superficies filtrantes A y B tienen potenciales hidráulicos $\Psi_A = h_A^{\text{piezo}}$ y $\Psi_B = h_B^{\text{piezo}}$ uniformes en cada una de ellas, y en el que la pared lateral del permeámetro se comporta como una superficie impermeable. En estas condiciones y dada la simetría del problema el potencial hidráulico debe ser de la forma $\Psi = \Psi(x)$, con x la dirección del flujo. Así, la ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas se convierte en

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \Psi}{dx^2} = 0$$

de solución

$$\Psi(x) = C_1 + C_2 x$$

con C_1 y C_2 dos constantes de integración. Como sabemos que $\Psi(x=0) = \Psi_A = h_A^{\text{piezo}}$ y $\Psi(x=L) = \Psi_B = h_B^{\text{piezo}}$ se tiene $C_1 = \Psi_A = h_A^{\text{piezo}}$ y $C_2 = (\Psi_B - \Psi_A)/L$, quedando el potencial hidráulico

$$\Psi(x) = \Psi_A + \frac{\Psi_B - \Psi_A}{L} x = h_A^{\text{piezo}} + \frac{h_B^{\text{piezo}} - h_A^{\text{piezo}}}{L} x \quad (6-37)$$

y la velocidad de flujo

$$v(x) = -k \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -k \frac{h_B^{\text{piezo}} - h_A^{\text{piezo}}}{L} = k \frac{h_A^{\text{piezo}} - h_B^{\text{piezo}}}{L} \quad (6-38)$$

El filtro cilíndrico. Consideremos el sistema que se muestra en la figura 6-13, un filtro cilíndrico de altura H y radios interior y exterior r_1 y r_2 a través del cual pasa un líquido desde el interior hacia el exterior. La superficie libre del líquido en el interior se encuentra a una altura h_1 por encima de la base del filtro, por lo que si tomamos referencia de alturas geométricas en esta última el potencial hidráulico en toda la superficie interior del filtro será $\Psi_1 = h_1$. Asimismo, la superficie libre del líquido en el exterior se encuentra a una altura h_2 por encima de la base del filtro, por lo que el potencial hidráulico en toda la superficie exterior del filtro será $\Psi_2 = h_2$. El potencial hidráulico es uniforme

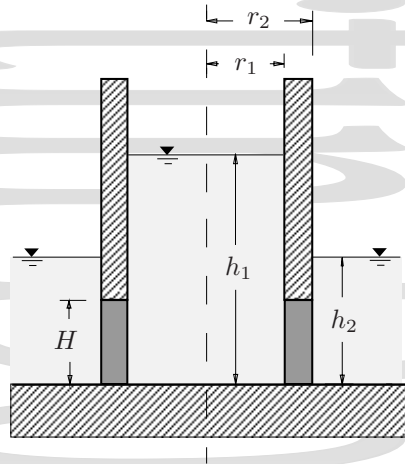


Figura 6-13: Recinto permeable cilíndrico con potencial hidráulico de simetría cilíndrica.

en cada una de las superficies límite interior y exterior (no depende ni de la altura ni del ángulo para cada una de ellas) y el filtro tiene simetría cilíndrica, por lo que el potencial hidráulico en su interior debe depender exclusivamente de la distancia al eje del cilindro en la forma $\Psi = \Psi(r)$.

Si consideramos la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas y tenemos en cuenta que al ser el potencial hidráulico radial, no hay términos asociados a la dependencia en θ o z , esta ecuación queda como

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dr} + \frac{d^2 \Psi}{dr^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} f(r) + \frac{df(r)}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{df(r)}{f(r)} = -\frac{dr}{r} \quad (6-39)$$

en función de la variable intermedia

$$f(r) = d\Psi/dr. \quad (6-40)$$

Integrando la última parte de la ecuación (6-39) se obtiene $f(r) = C_2/r$ donde C_2 es una constante de integración, quedando al integrar la ecuación (6-40)

$$d\Psi = C_2 \frac{dr}{r} \Rightarrow \Psi(r) = \Psi_0 + C_2 \ln \frac{r}{r_0}$$

en función de un valor conocido Ψ_0 para $r = r_0$.[†] Si tenemos en cuenta las condiciones de contorno en las superficies interior y exterior, $\Psi(r_1) = h_1$ y $\Psi(r_2) = h_2$ se obtiene el valor de la constante de integración C_2

$$C_2 = \frac{h_1 - h_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}}$$

quedando una distribución de potencial hidráulico

$$\Psi(r) = \Psi(r_1) + \frac{h_1 - h_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \ln \frac{r}{r_1} = h_1 + \frac{h_1 - h_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \ln \frac{r}{r_1} \quad (6-41a)$$

o

$$\Psi(r) = \Psi(r_2) + \frac{h_1 - h_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \ln \frac{r}{r_2} = h_2 + \frac{h_1 - h_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \ln \frac{r}{r_2} \quad (6-41b)$$

y una distribución de velocidades de flujo

$$\vec{v}(r) = -k \vec{\nabla} \Psi = -\frac{k}{r} \frac{h_1 - h_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \vec{u}_r \quad (6-42)$$

6.2.9. Flujo permeable a través de medios anisótropos

Hemos considerado el caso de un flujo isótropo en el que el coeficiente de permeabilidad del medio en un punto es independiente de la dirección del flujo en ese punto. Si además el medio tiene el mismo coeficiente de permeabilidad en todos los puntos del recinto se dice que es homogéneo e isótropo. Cuando el coeficiente de permeabilidad depende de la dirección y la dependencia es la misma para todos los puntos se dice que el medio es homogéneo y anisótropo.

La mayor parte de los terrenos son anisótropos en alguna medida. Por ejemplo, los terrenos sedimentarios están habitualmente formados por finas capas alternas y además, la tensión de compresión en la dirección horizontal es distinta de la que se tiene en la dirección vertical. Generalmente en terrenos sedimentarios homogéneos naturales, el coeficiente de permeabilidad es mayor en la dirección horizontal que en la vertical. En esta sección se abordarán los siguientes dos casos, el de un medio anisótropo compuesto de capas isótropas (a su vez con dos casos) y el de un medio anisótropo general.

Flujo paralelo y perpendicular a través de un medio anisótropo compuesto de capas isótropas.

Consideremos una sección vertical de un terreno estratificado formado por n capas isótropas, cada una de ellas de espesor d_1, d_2, \dots, d_n , con unas conductividades hidráulicas k_1, k_2, \dots, k_n , respectivamente y analicemos dos casos particulares interesantes en los que el flujo tiene lugar en las direcciones paralela y perpendicular a las capas.

[†] Una integral indefinida habría dado $\Psi(r) = C_1 + C_2 \ln r$, con constantes de integración

$$C_1 = \frac{h_2 \ln r_1 - h_1 \ln r_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{h_1 - h_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}}$$

a partir de las condiciones de contorno en las superficies 1 y 2.

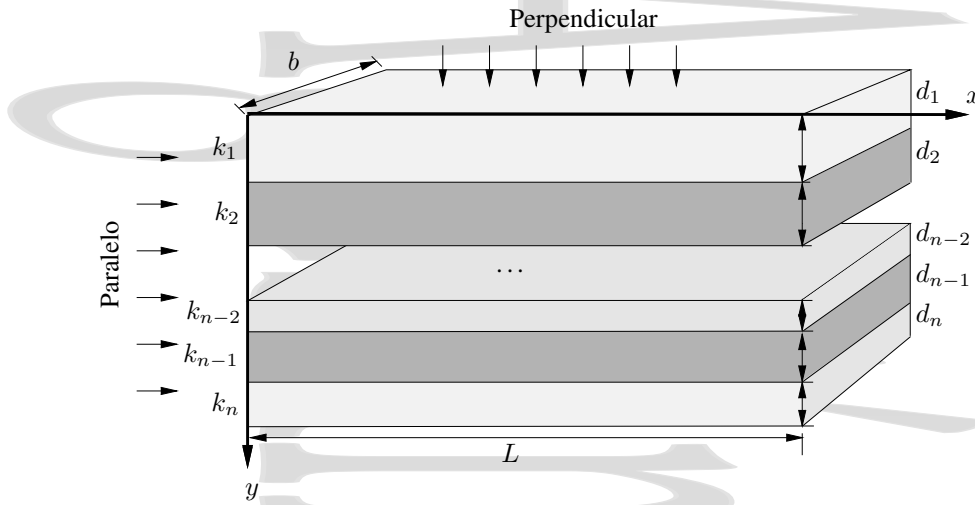


Figura 6-14: Flujo paralelo y perpendicular a través de un material permeable formado por capas de distintos materiales.

Flujo paralelo (capas en paralelo): Consideremos en primer lugar el flujo paralelo a las capas. En este caso las superficies equipotenciales deben ser perpendiculares a las capas y paralelas entre sí. El caudal filtrado será la suma de los caudales filtrados a través de cada una de las capas,

$$Q_i = d_i b k_i \frac{\Psi_i - \Psi_f}{L} \Rightarrow Q = \sum_{i=1}^n Q_i = b \frac{\Psi_i - \Psi_f}{L} \sum_{i=1}^n k_i d_i$$

donde $\Psi_i - \Psi_f$ es la disminución del potencial hidráulico en las capas en una distancia L (que coincide con la pérdida de carga). La velocidad media de descarga en la dirección x será

$$\bar{v}_x = \frac{Q}{S} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i d_i}{d} \frac{\Psi_i - \Psi_f}{L}$$

por lo que se puede escribir una *conductividad hidráulica efectiva* cuya componente x es, para este flujo en la dirección x paralelo a las capas,

$$k_x = \sum_{i=1}^n \frac{k_i d_i}{d} \quad (6-43)$$

Flujo perpendicular (capas en serie): Consideremos ahora el flujo perpendicular a las capas. En este caso las superficies equipotenciales deben ser paralelas a las capas y entre sí. Para que se satisfaga la ecuación de continuidad la componente y de la velocidad debe ser la misma en todas las capas. Como la pérdida total de carga debe ser igual a la suma de las pérdidas de carga en cada capa, se tiene

$$\Delta h_i = \Delta \Psi_i = \frac{d_i}{k_i} v \Rightarrow \Delta h = \sum_{i=1}^n \Delta h_i = \sum_{i=1}^n \Delta \Psi_i = v \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{k_i}$$

donde $\Delta \Psi_i$ es la disminución de potencial hidráulico en la capa i (igual a la pérdida de carga Δh_i en la capa i). La velocidad de descarga queda como

$$v = \frac{\Psi_i - \Psi_f}{\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{k_i}} = \frac{d}{\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{k_i}} \frac{\Psi_i - \Psi_f}{d}$$

que corresponde a una *conductividad hidráulica efectiva* de componente y para este flujo en la dirección y

$$k_y = \frac{d}{\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{k_i}} \quad (6-44)$$

Flujo a través de un medio homogéneo y anisótropo general.

Para estudiar lo que ocurre en un medio genérico anisótropo y homogéneo consideraremos el problema descrito en los ejes principales del tensor conductividad hidráulica. En esos ejes, en función de las conductividades hidráulicas principales k_1 , k_2 y k_3 , las componentes de la velocidad de descarga que se obtienen de la Ley de Darcy quedan:

$$v_1 = -k_1 \frac{\partial \Psi}{\partial r_1} \quad (6-45a)$$

$$v_2 = -k_2 \frac{\partial \Psi}{\partial r_2} \quad (6-45b)$$

$$v_3 = -k_3 \frac{\partial \Psi}{\partial r_3} \quad (6-45c)$$

En el sistema de ejes principales la ecuación de continuidad se escribe como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial r_1} + \frac{\partial v_2}{\partial r_2} + \frac{\partial v_3}{\partial r_3} = 0 \quad (6-46)$$

En un medio homogéneo como el que estamos considerando, $[k_{ij}]$ no depende del punto, y por tanto no se ve afectada por las derivadas espaciales, quedando, al sustituir la ley de Darcy en la ecuación de continuidad

$$k_1 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r_1^2} + k_2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r_2^2} + k_3 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r_3^2} = 0. \quad (6-47)$$

Si consideramos el siguiente cambio de variable, en función de una constante arbitraria k con dimensiones de conductividad hidráulica,

$$\begin{aligned} q_1 &= \sqrt{\frac{k}{k_1}} r_1 & r_1 &= \sqrt{\frac{k_1}{k}} q_1 \\ q_2 &= \sqrt{\frac{k}{k_2}} r_2 & \iff & r_2 = \sqrt{\frac{k_2}{k}} q_2 \\ q_3 &= \sqrt{\frac{k}{k_3}} r_3 & r_3 &= \sqrt{\frac{k_3}{k}} q_3 \end{aligned} \quad (6-48)$$

la ecuación (6-47) se puede reescribir como

$$k \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q_1^2} + k \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q_2^2} + k \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q_3^2} = 0. \quad (6-49)$$

que, eliminando k se puede escribir como

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q_2^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q_3^2} = \nabla_q^2 \Psi = 0.$$

que es de nuevo la ecuación de Laplace, pero ahora en el sistema de coordenadas reescalado. Así, mediante una simple expansión o contracción de las coordenadas espaciales podemos transformar una región del flujo anisotrópa en una región isotrópa ficticia en la que la ecuación de Laplace es válida y en la que en principio podríamos obtener una solución para ésta. Una vez se haya resuelto el problema para esta región ficticia, para obtener la solución para el flujo real que se tiene basta con invertir la transformación.

El hecho de que se cumpla la ley de Darcy (6-31) no puede verse afectado por la elección del sistema de ejes y en concreto por el redimensionado de los mismos que acabamos de tratar. No solo eso, si en la ley de Darcy (6-31) realizamos el cambio de variables (6-48) tanto en las componentes dr_i/dt de la velocidad como en las $\partial \Psi / \partial r_i$ del gradiente la ley de Darcy queda, para el material anisótropo en el sistema de coordenadas reescalado en la forma $\vec{v}_q = -k \vec{\nabla}_q \Psi$ similar a la ley de Darcy para un material isotrópo (6-29) en función del parámetro k . Esto implica que en el material anisótropo analizado en estos ejes como un material isotrópo ficticio la velocidad de descarga es también perpendicular a las superficies equipotenciales del campo hidráulico expresado también en estos ejes.

6.2.10. La red de flujo.

Se denomina *red de flujo* a una representación gráfica de las líneas de corriente y de sus correspondientes superficies equipotenciales en una región del flujo. La construcción de la red de flujo es uno de los métodos más valiosos empleados en el análisis cualitativo de los problemas de flujo en dos dimensiones, aunque a menudo requiere tediosos ajustes de prueba y error. Al construir la red de flujo se llena la zona en permeación con una serie de líneas de flujo y otra serie de superficies equipotenciales que forman un ángulo recto entre unas y otras en los puntos en que se cruzan.

Nótese que la construcción de la red de flujo sólo proporciona una solución aproximada al problema, aunque puede ser buena incluso en el caso de geometrías complejas a partir de una serie de reglas sencillas (inicialmente debidas a Phillip Forchheimer en torno a 1900 y después mejoradas por Arthur Casagrande en 1937). El método habitual de construcción de la red de flujo es el siguiente:

1. Dibujar a escala los límites del recinto de forma que puedan hacerse terminar en dichos límites todas las líneas de corriente y equipotenciales. En caso de tratarse de un material anisótropo homogéneo debe primero reescalarsse el problema en la forma descrita en la sección anterior.
2. Trazar de forma aproximada unas pocas líneas de flujo, teniendo en cuenta las condiciones en los límites del recinto. Es decir, entre otras cosas, que las líneas de corriente han de ser tangentes a las superficies impermeables y perpendiculares a las superficies filtrantes. No debe perderse la noción de que éstas son sólo unas pocas de entre el continuo de líneas de corriente. Como una ayuda a la hora de espaciar las líneas de corriente, obsérvese que la distancia entre líneas de corriente consecutivas aumenta en la dirección de mayores radios de curvatura. Es conveniente empezar en las zonas más sencillas, por ejemplo en aquéllas en las que las líneas de flujo son paralelas entre sí, lo mismo que las equipotenciales, de forma que los “cuadrados” de la red de flujo son realmente cuadrados, y después seguir hacia las zonas de mayor complejidad.
3. Trazar las equipotenciales correspondientes, considerando que deben intersectar a ángulos rectos a todas las líneas de corriente para materiales isotropos o anisotropos reescalados. Al inscribir un círculo en uno de estos “cuadrados curvilíneos” éste debe tocar cada lado sólo una vez. Estos “cuadrados” deben cambiar de tamaño gradualmente.
4. Afinar las líneas de corriente y equipotenciales trazadas para que se satisfagan bien las condiciones anteriores. Asimismo debe tenerse en cuenta la simetría del problema por si es posible simplificar la representación.
5. Se recomienda como una prueba adicional comprobar que las diagonales de los “cuadrados” formados por líneas de corriente y equipotenciales forman curvas sin variaciones excesivamente bruscas que se cruzan formando ángulos rectos.

6.2.11. Ejemplos de redes de flujo en distintos sistemas

Presas de tierra

Las *presas de tierra* son un caso particular de las presas de materiales sueltos en las que el volumen principal se realiza con un medio arcilloso, arenoso o con una grava de grano fino.

Cuando las presas de tierra están en las condiciones que se muestran en la figura 6-12, con una superficie de escorrentía de esa forma, puede producirse perforación de la presa como consecuencia de una erosión interna que poco a poco va arrastrando la tierra y produciendo un canal por el interior de la presa. Esta erosión, denominada *tubificación*, que comienza en la parte aguas abajo y va propagándose por el interior de la presa a través de líneas de conductividad hidráulica máxima puede evidenciarse muchos años después de que ésta se ha construido.

Para minimizar el riesgo de perforación se utilizan distintos sistemas, como paredes impermeables enterradas o la colocación de un núcleo impermeable en la presa. Uno de los sistemas consiste en controlar el efecto de la filtración mediante un dren interno como se muestra en la figura 6-15 diseñado de forma que la superficie libre está siempre por debajo de la superficie externa de la presa y por tanto no haya superficie de escorrentía más que en el dren, donde se controla que la tierra no pase al mismo mediante rejillas y filtros de tamaño de poro adecuado.

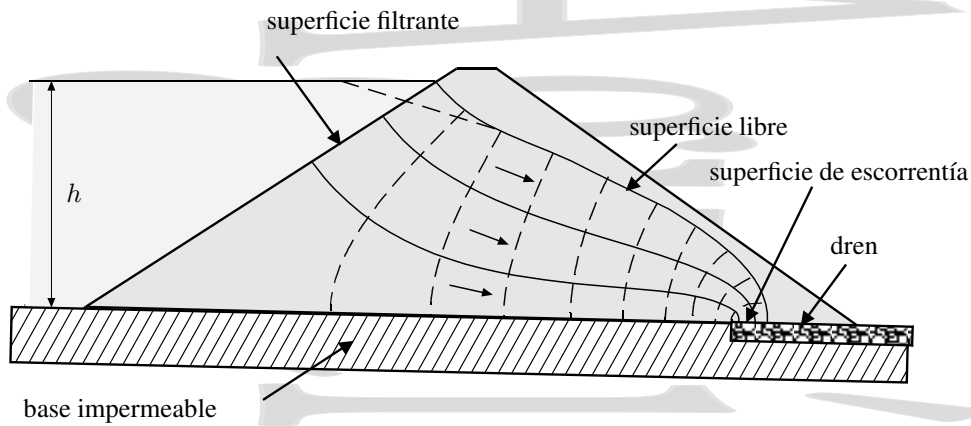


Figura 6-15: Red de flujo en una presa de tierra típica con un dren interno.

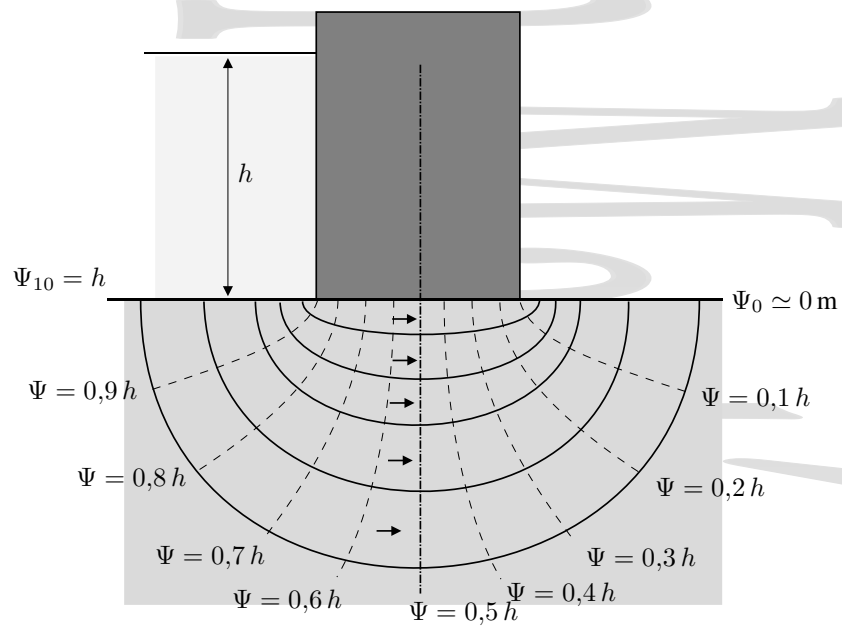


Figura 6-16: Red de flujo en una presa de gravedad con su base al nivel del suelo. Las superficies equipotenciales se muestran con líneas de trazos y las líneas de flujo con líneas continuas.

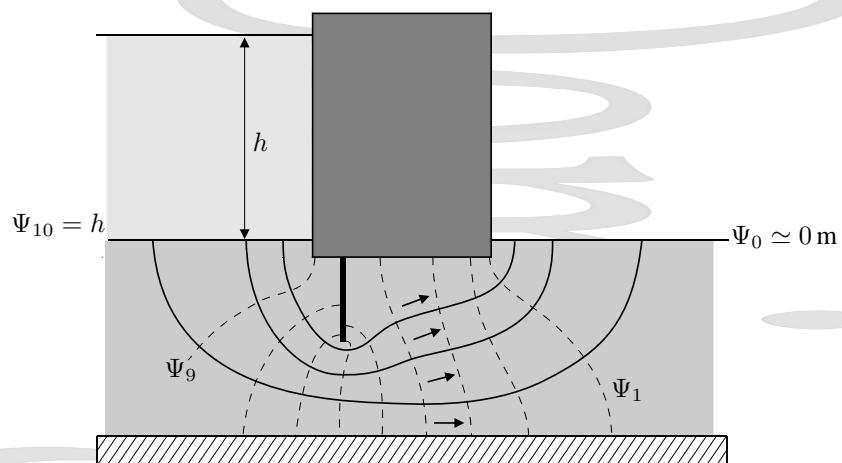


Figura 6-17: Red de flujo en una presa de gravedad ligeramente enterrada y con una pantalla impermeable y una base impermeable a una cierta profundidad.

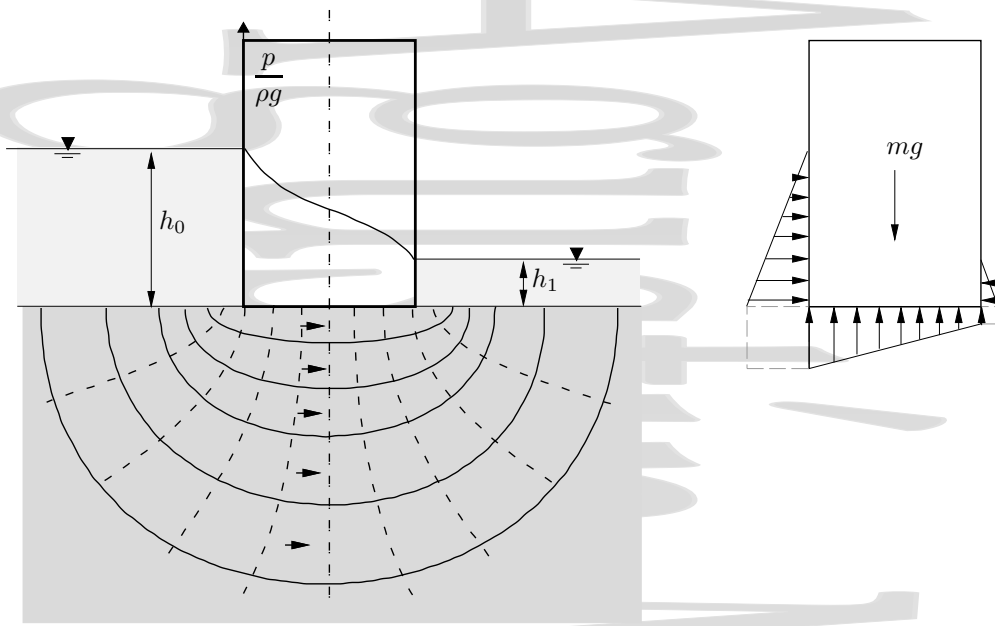


Figura 6-18: Distribución de presiones bajo una presa. Esta distribución da lugar a una distribución de fuerzas en general inhomogénea que hay que tener en cuenta en los cálculos de estabilidad.

Presas de gravedad

En la figura 6-16 se muestra un ejemplo de red de flujo bajo una presa de gravedad sencilla cuya base está al mismo nivel del terreno, que se supone homogéneo e isotrópico. Como se ve en la figura, en estas condiciones el flujo es simétrico y los potenciales hidráulicos van desde un valor máximo igual a h en la superficie filtrante aguas arriba a un valor mínimo aproximadamente nulo (suponiendo un caudal muy pequeño) aguas abajo. Las superficies equipotenciales se muestran con líneas de trazos y las líneas de flujo con líneas continuas.

Puede mejorarse notablemente el comportamiento de esa presa frente a las filtraciones mediante dos sencillas modificaciones en el diseño. Por una parte se entierra parcialmente la presa, se forma que su parte inferior queda por debajo del nivel del terreno y por otra se coloca una pantalla impermeable en su parte inferior como se muestra en la figura 6-15. Estas medidas hacen que el peligro de perforación (tubificación) se reduzca notablemente así como que las velocidades de salida aguas abajo se reduzcan como consecuencia del alargamiento de los recorridos de las líneas de flujo, dando como resultado una disminución de las filtraciones bajo la presa.

6.2.12. Subpresiones

La presencia de filtraciones bajo una estructura como la de una presa introduce un elemento adicional a tener en cuenta en cuanto a su estabilidad. Si consideramos la línea de flujo permeable justo en contacto con la base de la presa, en cada punto de esa línea habrá un determinado valor de la presión p , que irá disminuyendo según se vaya produciendo disipación de energía en el flujo a través del medio permeable, dando lugar a una distribución de presiones a la que se denomina *subpresiones*.

Las fuerzas asociadas a estas subpresiones producen un empuje inhomogéneo que reduce el peso efectivo de la estructura, con un eje de acción que debe calcularse conocida la forma de la distribución. Ambas cosas, valor y línea de acción del empuje, afectan a las ecuaciones de equilibrio traslacional y rotacional y por tanto a la estabilidad de la estructura, por lo que deben tenerse en cuenta.

Por ejemplo, en una presa no enterrada en la que no se han tomado medidas para aminorar el efecto de estas subpresiones la distribución de presiones en su base puede ser, en la práctica, de la forma que se muestra en la figura 6-18, aproximadamente lineal. Esto hace que, a la hora de estimar el momento de vuelco sea necesario considerar, además de los momentos debidos a las fuerzas actuando sobre las paredes verticales el efecto de la distribución de

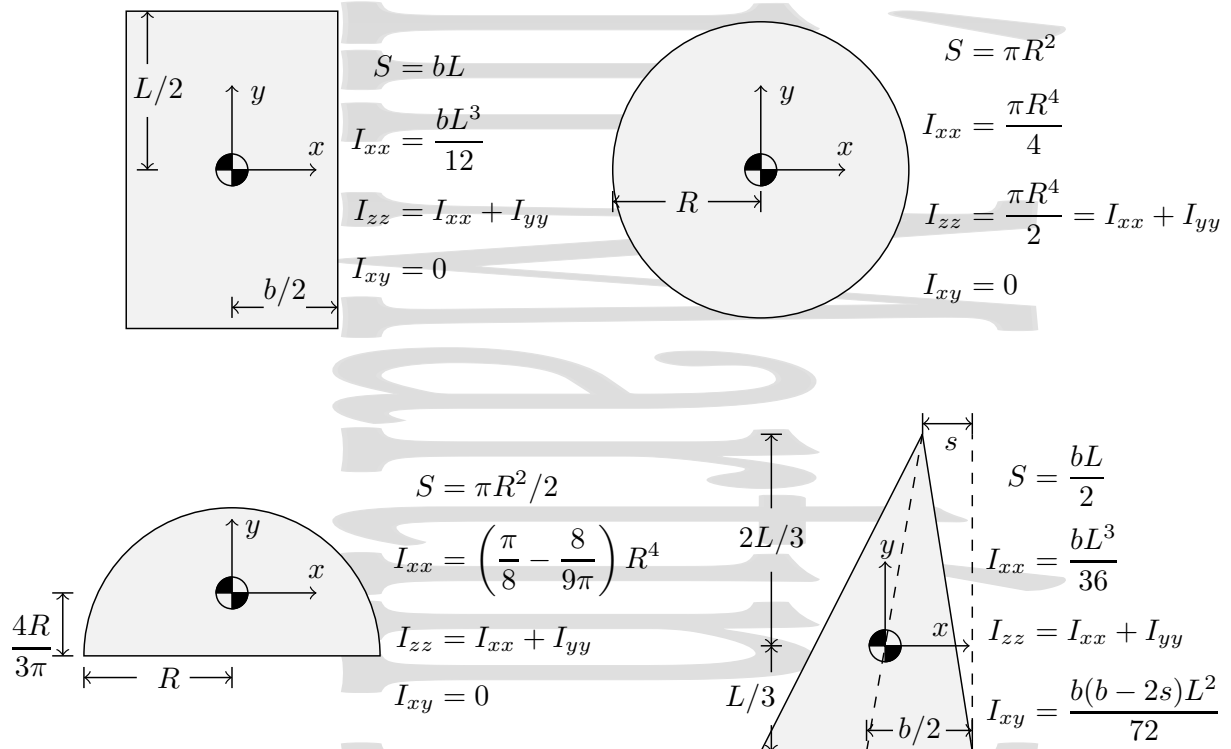
presiones sobre la base.

Para amortiguar el efecto de las subpresiones se instalan, cerca de la zona aguas arriba, drenajes verticales dentro de la presa desde la base de la misma a una galería de desagüe a un nivel superior al nivel aguas abajo. Este mismo sistema se utiliza en losas grandes, donde es preferible taladrar verticalmente el piso para aliviar el efecto de las subpresiones y evacuar el agua filtrada. En otros casos se utilizan tirantes anclados bajo el piso para contrarrestar el efecto de las subpresiones.

Apéndice A

Tablas de datos

A.1. Momentos y productos de inercia de algunas secciones planas sencillas.



A.2. Conversión de unidades de presión.

Relación entre las unidades de medida de la presión									
Nombres de las unidades	N/m ² (Pascal)	Bar	kgf/m ²	Atmósfera técnica kgf/cm ² , (at.)	Atmósfera física atm.	mm columna de agua mm H ₂ O	mm columna mercurio mm Hg, (torr)	Libra inglesa por pulgada cuadrada lb/plg ² , (psi)	dy/cm ²
1 N/m ² (Pa)	1	1 · 10 ⁻⁵	1,101972	1,01972 · 10 ⁻⁵	0,98692 · 10 ⁻⁵	0,101972	750,06 · 10 ⁻⁵	14,5038 · 10 ⁻⁵	10
1 bar	10 ⁵	1	10197,2	1,01972	0,98692	10197,2	750,06	14,5038	10 ⁶
1 kgf/m ²	9,80665	9,80665 · 10 ⁻⁵	1	10 ⁻⁴	0,96784 · 10 ⁻⁴	1	735,55 · 10 ⁻⁴	14,2233 · 10 ⁻⁴	98,0665
1 at. = 1 kgf/cm ² ≈ 1 atm.	0,980665 · 10 ⁵	0,980665	10 ⁴	1	0,96784	10 ⁴	735,55	14,2233	9,8 · 10 ⁵
1 atm. (física)	1,01325 · 10 ⁵	1,01325	1,03323 · 10 ⁴	1,03323	1	1,03323 · 10 ⁴	760	14,6959	1,013 · 10 ⁶
10 ⁴ mm H ₂ O	0,980665 · 10 ⁵	0,980665	10 ⁴	1	0,96784	10 ⁴	735,55	14,2233	9,8 · 10 ⁵
10 ³ mm Hg	1,33322 · 10 ⁵	1,33322	1,35951 · 10 ⁴	1,35951	1,31579	1,35951 · 10 ⁴	10 ³	19,3368	1,333 · 10 ⁶
10 lb/plg ²	0,68948 · 10 ⁵	0,68948	0,70307 · 10 ⁴	0,70307	0,68046	0,70307 · 10 ⁴	517,15	10	6,8948 · 10 ⁵

Índice alfabético

A

aceleración

- convectiva, 35
- de transporte, 35
- local, 35

altura

- cinética, 37, 90
- de carga, 37
 - de una bomba, 61
 - de una turbina, 61
- hidráulica, 37
- de presión, 37, 90
- de velocidad, 37, 90
- geométrica, 37, 90
- metacéntrica, 17
- motriz, línea de, 69
- piezométrica, 37
 - línea de, 69
- total, 37
 - línea de, 69

ángulo

- de contacto, 79
- de deformación, 2

aproximación del continuo, 84

arcilla, 82

arena, 82

Arquímedes, principio de, 15

atmósfera

- adiabática, 14
- de densidad homogénea, 14
- isoterma, 13, 14
- tipo, 14

B

Bernoulli

- ecuación de, 36, 37, 39
- ecuación generalizada de, 68

Bingham, material lineal de, 53

Blauius, fórmula de, 64

bombas, 61

C

campo

- de densidades, 24
- de presiones, 24
- de velocidades, 24
- hidráulico, 90

cantidad de movimiento, 30

capa límite, 47

- laminar, 47
- turbulenta, 47

capilaridad, 81

carga

- altura de, 37
- hidráulica, 37
 - altura de, 37
- pérdida de, 46

caudal, 27

- másico, 27

cavitación, 71

centro

- de carena, 15
- de empuje, 15
- de gravedad, 15, 18, 19
- de presiones, 19
- de superficie, 18
- de vectores paralelos, 19
- de volumen, 18

centroide, 18

choque hidráulico, 71

coeficiente

- de compresibilidad, 5, 73
- de dilatación de volumen, 6
- de fricción, 62
- de permeabilidad, 85
- de viscosidad dinámica, 49

Colebrook, fórmula de, 64

compresibilidad, 5

- coeficiente de, 5
- módulo de, 5

condición

- de contorno, 93
- de Dirichlet, 93
- de primera especie, 93
- de segunda especie, 93
- de von Neumann, 93
- mixta, 93
- de no deslizamiento, 47

conductividad hidráulica, 85, 88

- efectiva, 97
- principal, 91

contacto

- ángulo de, 79
- línea de, 79

continuo, 2

- hipótesis del, 3, 84

curvas

- de corriente, 51
- reológicas, 51

D

Darcy, Henry, 84

Darcy-Weisbach, ley de, 62

densidad, 3

- de flujo másico, 29
- relativa, 4

diagrama de Moody, 64

diámetro hidráulico, 63

dinámica de fluidos, 23

- perfectos, 23
- reales, 45

E

ecuación

- de Bernoulli, 36, 37, 39, 89
- generalizada, 68
- de Bernoulli generalizada, 89
- de continuidad, 27
- de continuidad,
 - forma diferencial, 28, 30
 - forma integral, 26
- de Euler, 31

- de Hagen-Poiseuille, 63
- de Laplace, 92
- ecuación general
 - de la estática de fluidos, 9
 - de la hidrostática, 9
- ecuaciones de Navier-Stokes, 56
- efecto Venturi, 42
- eje
 - de empuje, 15
 - de flotación, 16
- empuje, 15
 - de, 15
- energía línea de, 69
- equilibrio
 - estable, 17
 - indiferente, 17
 - inestable, 17
 - metaestable, 17
- estática de fluidos, 7
- Euler
 - ecuación de, 31
 - método de, 24
- F**
- fluidez, 1
- fluido
 - anómalo, 51
 - dilatante, 52
 - en movimiento, 5
 - en reposo, 5, 7
 - estático, 5, 7
 - newtoniano, 48, 59
 - no newtoniano, 51
 - pseudo-plástico, 52
 - real, 45
 - reopéctico, 53
 - tixotrópico, 53
 - viscoplástico, 53
- flujo
 - compresible, 24
 - de energía de la corriente fluida, 61
 - del agua mojada, 4
 - del agua seca, 4
 - estacionario, 24
 - incompresible, 24, 27
 - irrotacional, 24, 35
 - no estacionario, 24
 - no viscoso, 24
 - rotacional, 24
 - viscoso, 24
- fórmula
 - de Blasius, 64
 - de Colebrook, 64
 - de Laplace, 79
 - de Laplace-Young, 79
 - de Newton, 48
 - de Poiseuille, 58, 60
 - de von Karman, 64
- fuerza
 - adhesiva, 79
 - de cohesión, 79
 - hidrostática
 - sobre superficies curvas, 21
 - sobre superficies planas, 18
 - neta, 20
- G**
- golpe de ariete, 71
- gradiente
 - hidráulico, 90
 - hidráulico promedio, 85
 - térmico, 14
- H**
- hipótesis del continuo, 3, 84
- I**
- índice de poros, 83
- L**
- Lagrange, método de, 23
- laminar
 - flujo, 87
 - régimen, 46
- Laplace, ecuación de, 92
- Laplace, fórmula de, 79
- Laplace-Young, fórmula de, 79
- ley
 - de conservación de la masa, 27
 - de Darcy, 85
 - macroscópica, 85
 - microscópica en tres dimensiones, medios anisótropos, 91
 - microscópica en tres dimensiones, medios isotropos, 91
 - microscópica en una dimensión, 91
 - de Darcy-Weisbach, 62
 - de Gauss, 29
 - de la potencia, 51
 - de Newton, 48
 - de Sutherland, 51
- límite de fluidez, 53
- limo, 82
- línea
 - de alturas
 - motrices, 69
 - piezométricas, 69
 - totales, 69
 - de campo, 25
 - de contacto, 79
 - de corriente, 25
 - de energías, 69
 - de filtración, 94
 - de flujo, 25
 - de nivel energético, 69
 - de traza, 25
 - piezométrica, 69
- longitud equivalente de un accesorio, 68
- M**
- manómetro, 5, 12
 - diferencial, 13
- material
 - viscoelástico, 53
- material lineal de Bingham, 53
- medio
 - anisótropo, 96
 - continuo, 2
 - homogéneo, 96
 - isótropo, 96
 - permeable, 82
- metacentro, 17
- método
 - de Euler, 24
 - de Lagrange, 23
- módulo
 - de compresibilidad, 5, 73
 - de Young, 73

- momento
 - de inercia de una sección plana, 19, 103
 - lineal, 30
- Moody, diagrama de, 64
- N**
- Navier-Stokes, ecuaciones de, 56, 91
- Newton
 - fórmula de, 48
 - ley de, 48
- nivel
 - capilar, 83
 - energético, línea de, 69
 - freático, 82, 94
- número
 - de cavitación, 71
 - de Reynolds, 57, 88
- P**
- paradoja
 - de Pascal, 10
 - hidrostática, 10
- Pascal,
 - paradoja de, 10
 - principio de, 10
- pérdida de carga, 46, 61
 - lineal, 62
 - local, 66
 - representación gráfica, 69
 - singular, 66
- permeabilidad
 - física, 88
 - intrínseca, 88
- permeámetro, 84, 89
- peso específico, 4
- piezométrica
 - línea, 69
- piezómetro, 37
- Poiseuille
 - fórmula de, 58
 - régimen de, 46
- porosidad, 83
- potencia
 - de la corriente, 61
 - extraída por la turbina, 61
 - suministrada por la bomba, 61
- potencial
 - capilar, 83
 - de matriz, 83, 90
 - de presión, 90
 - de succión, 90
 - de velocidad, 90
 - gravitacional, 90
 - hidráulico, 90
 - osmótico, 90
- prensa hidráulica, 10
- presa
 - de gravedad, 101
 - de tierra, 93, 99
- presión, 5, 7
 - absoluta, 5
 - conversión de unidades, 104
 - de vacío, 5
 - dinámica, 41
 - estática, 41
 - manométrica, 5, 12, 20, 37
- principio
 - de Arquímedes, 15
 - de los vasos comunicantes, 11
 - de Pascal, 10
 - producto de inercia de la sección plana, 20, 103
- R**
- radio hidráulico, 63
- red
 - de flujo, 99
 - de tuberías, 70
- régimen
 - de Poiseuille, 46
 - de transición, 47, 58
 - de Venturi, 46
 - laminar, 46
 - turbulento, 46
- reogramas, 51
- Reología, 51
- reopécticos, fluidos, 53
- Reynolds, número de, 57, 88
- rugosidad, 63
 - relativa, 63
- S**
- senda, 25
- Stokes, teorema de, 36
- subpresiones, 101
- superficie
 - de escorrentía, 94
 - equipotencial hidráulica, 90
 - filtrante, 94
 - impermeable, 93
 - libre, 33, 94
- T**
- tensión
 - cortante en la pared de una tubería, 63
 - cortante en una tubería, 59
 - de desplazamiento, 53
 - inicial de desplazamiento, 53
 - superficial, 76, 77
- teorema
 - de Stokes, 36
 - de Torricelli, 39
- tixotrópicos, fluidos, 53
- Torricelli, teorema de, 39
- tuberías
 - en paralelo, 70
 - en serie, 70
 - redes complejas, 70
- tubificación, 99
- tubo
 - capilar, 81
 - de corriente, 26
 - de flujo, 26
 - en U, 11
- turbinas, 61
- turbulencia, 50
 - completa, 64
- turbulento
 - flujo, 87
 - régimen, 46
- V**
- vasos comunicantes, 11
- velocidad
 - característica, 58
 - de deformación, 2
 - de descarga, 86

de flujo, 86
microscópica promedio, 87
Venturi
 efecto, 42
 régimen de, 46
venturímetro, 42
viscosidad, 1, 4, 45
 cinemática, 49
 dinámica, 49
 efectiva, 52
 en gases, 50

 en líquidos, 50
volumen específico, 4
von Karman, fórmula de, 64
vorticidad, 35

Z

zona
 crítica, 58
 de fluido libre, 47
 de transición, 64

Referencias

- [1] White, F. M., *Mecánica de fluidos*. McGraw-Hill, México, 1983.
- [2] Shames, I. H., *Mecánica de los fluidos*. Ed. del Castillo, S.A., 1970.
- [3] Streeter, V. L. y E. B. Wylie, *Mecánica de los fluidos*. McGraw-Hill / Interamericana de México, S.A., México, 1988.
- [4] Giles, R. V., *Mecánica de los fluidos e hidráulica*. McGraw-Hill, México, 1988.
- [5] Rabinóvich, Y. Z., *Hidráulica*. Ed. Rusia-URSS, Moscú, 1994.
- [6] King, H., *Handbook of Hydraulics for the Solution of Hydraulic Problems*. McGraw-Hill Book Company, Incorporated, 1918.
- [7] Feynmann, R. P., R. B. Leighton y M. Sands, *Electromagnetismo y materia*, vol. 2 de *Física*. Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1987.
- [8] Iribarne, J. V. y W. L. Godson, *Termodinámica de la atmósfera*. Monografías, Ministerio de Medio Ambiente. Dirección General del Instituto Nacional de Meteorología, Madrid, 1996.
- [9] Martín Domingo, A., “Apuntes de Análisis Vectorial.” <http://oa.upm.es/44666/>, 2017.
- [10] Prandtl, L. y O. G. Tietjens, *Fundamentals of hydro and aeromechanics*. Dover, N. Y., 1957.
- [11] Tipler, P. A., *Física*. 2 vols, Reverté, Barcelona, 1992.
- [12] Isenberg, C., *The science of soap films and bubbles*. Tieto Ltd, Clevedon, 1978.
- [13] Landau, L., A. Ajiezer y E. Lifshitz, *Curso de Física general: mecánica y Física molecular*. Ed. Mir, Moscú, 1979.
- [14] Harr, M. E., *Groundwater and seepage*. Dover, New York, 1991.
- [15] Lambe, T. W. y R. V. Whitman, *Mecánica de suelos*. Limusa, México, 1995.
- [16] Jiménez Salas, J. A. y J. L. de Justo Alpañes, *Propiedades de los suelos y de las rocas*, vol. I de *Geotecnia y cimientos*. Rueda, Madrid, 2ª edición, 1975.
- [17] Marshall, T. J., *Soil Physics*. Cambridge University Press, 1988.
- [18] González de Posada, F., F. A. González Redondo, M. González Redondo y M. D. Redondo Alvarado, *Hidráulica del medio permeable: teoría físico-matemática de Darcy*, vol. 388 de *Cuadernos de apoyo a la docencia*. Instituto Juan de Herrera, ETSAM, Madrid, 2012.
- [19] Darcy, H., *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon*. Dalmont, París, 1856.